Stochastik als Mathematik der Glücksspiele
-
Ein Projekt zu Grunderfahrungen, Begriffen und Zusammenhängen

Pädagogische Prüfungsarbeit im Fach Mathematik

zur Zweiten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien

vorgelegt von

Axel Müller

Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Frankfurt am Main

Frankfurt, August 2005

Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG 1

2. DIE PLANUNG DES PROJEKTS 2

2.1. DIDAKTISCHE ÜBERLEGUNGEN 2
2.1.1. Reichhaltige Lernsituation – Einbettung guter Probleme 2
2.1.2. Die ausgewählten Glücksspiele 6
2.1.2.1. Lotto 7
2.1.2.2. Keno 8
2.1.2.3. Roulette 9
2.1.2.4. Black-Jack 10
2.1.3. Mathematische Hintergründe – Martingale 11
2.2. METHODISCHE ÜBERLEGUNGEN 12
2.2.1. Die Projektmethode 12
2.2.1.1. Die Komponenten eines Projektes 12
2.2.1.2. Die Rollen der Schüler und des Lehrers 15
2.2.1.3. Eigenschaften der Projektmethode 16
2.2.1.4. Projektmethode und Projektmanagement 17
2.2.2. Das Projekt "Glücksspiele und Stochastik" 18
2.2.2.1. Rahmenbedingungen 18
2.2.2.2. Die Lerngruppe 18
2.2.2.3. Komponenten des Projekts „Glücksspiele und Stochastik“ 19

3. DER VERLAUF DES PROJEKTS 23

3.1. DIE LERNGRUPPE 23
3.2. BESCHREIBUNG DER PLENUMSSTUNDE „GLÜCKSSPIELE UND MATHEMATIK“ 23
3.2.1. Didaktische Überlegungen 23
3.2.2. Methodische Überlegungen 24
3.2.3. Nachbetrachtung 25
3.3. ARBEIT DER TEILPROJEKTGRUPPEN 26
3.3.1. Arbeit der Teilprojektgruppe „Keno“ 26
3.3.1.1. Beschäftigungsfelder und Projektdurchführung 26
3.3.1.2. Projektabschluss – Dokumentation der Lernergebnisse 27
3.4. Arbeit der Teilprojektgruppe „Roulette“ 28
3.4.1.1. Beschäftigungsfelder und Projektdurchführung 28
3.4.1.2. Projektabschluss – Dokumentation der Lernergebnisse 29
3.4.2. Arbeit der Teilprojektgruppe „Lotto“ 30
3.4.2.1. Beschäftigungsfelder und Projektdurchführung 30
3.4.2.2. Projektabschluss – Dokumentation der Lernergebnisse 31
3.5. BESCHREIBUNG DER PLENUMS-STUNDE: „EIN ANDERES SPIEL – DER FAIRE PREIS EINER AKTIENOPTION“ 32
3.5.1. Didaktische Überlegungen 32
3.5.2. Methodische Überlegungen 33
3.5.3. Nachbetrachtung 34

4. REFLEXION DES PROJEKTES 36

A. ANHANG A-1

A -1. LITERATURVERZEICHNIS A-1
A -2. MATHEMATISCHE HINTERGRÜNDE – ERWEITERTE SACHANALYSE A-4
A-2.1. Martingale A-4
A-2.2. Optionspreise im Binomialbaum-Modell A-4
A-2.3. Mid-Square-Methode zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen A-6
A -3. MATERIALIEN ZU DEN SPIELEN A-7
A-3.1. Keno A-7
A-3.2. Roulette A-8
A-3.3. Black Jack A-9

A -4. MATERIALIEN ZUR PROJEKTDURCHFÜHRUNG A-11
A-4.1. Projektplan........ *A-11*
A-4.2. Vorgeplante Fragen zu den Spielen........ *A-12*
A -5. MATERIALIEN ZUM VERLAUF DES PROJEKTES........ A-13
A-5.1. Materialien zu den Plenumsstunden........ *A-13*
A-5.2. Tabellarische Übersicht über den Verlauf des Projektes........ *A-15*
A-5.3. Fragebogen für Rückmeldungen der Schüler........ *A-16*
A -6. PRODUKTE DER PROJEKTARBEIT........ A-17

1. Einleitung

Die Initiative zu dem hier beschriebenen Projekt kam von Studienrat Andreas Feltin, der an der Bettinaschule Mathematik, Ethik und katholische Religion unterrichtet. Im Herbst 2004 äußerte er die Idee, zusammen mit mir im Rahmen der Projektwoche an der Bettinaschule ein Projekt „Glücksspiele und Stochastik" anzubieten. Da ich bereits projekthaft mit Schülern gearbeitet hatte, kam ich schnell zu der Überzeugung, dass dies eine gute Möglichkeit sei, Schüler mit wichtigen und interessanten Aspekten dieses Gebietes vertraut zu machen. Nachdem ich entschieden hatte, das Projekt zur Grundlage dieser Arbeit zu machen, übernahm ich die Planung.
Auch der hessische Lehrplan macht in der Beschreibung des Stochastikunterrichts der Sekundarstufe II deutlich, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Gebiet ist, in dem die Schüler wichtige Inhalte durch selbstständiges Arbeiten an lebensweltlichen Fragestellungen erlernen können. Ebenso werden hier die Aspekte der Mathematik als anwendungsorientierte Wissenschaft und die damit verbundene Modellbildung unterstrichen.[1]

Im Rahmen dieser Arbeit möchte ich nun aufzeigen, dass ein Projekt zu Glücksspielen eine „reichhaltige Lernsituation"[2] darstellen kann, in der die Schüler Raum, Gelegenheit und Anlass haben, Grunderfahrungen mit zufälligen Vorgängen zu machen, darauf aufbauend wichtige Begriffe zu bilden und schließlich wesentliche stochastische Zusammenhänge zu erkennen.
Der Projektmethode entsprechend lag ein Großteil meiner Tätigkeiten im Vorfeld in vorbereitenden und planenden Tätigkeiten. Während der Projektdurchführung trat ich als beratender „Hintergrundlehrer" auf. Die Schüler arbeiteten weitgehend selbstständig. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt daher auf meinen didaktischen und methodischen Überlegungen zur Vorbereitung des Projekts.

Ich verwende im ganzen Text das Wort Schüler geschlechtsneutral für männliche und weibliche Schüler.

---

[1] vgl. Lehrplan, S. 59
[2] Ich verwende den Begriff im Sinne von VERNAY und FLEWELLING

2. Die Planung des Projekts

Inhalt und Methode waren bereits bei der ersten Überlegung miteinander verbunden. Dies ist ein Charakteristikum der Projektmethode.[3] Die im Folgenden vollzogene Trennung von didaktischen und methodischen Überlegungen entspricht demnach nicht der Genese der Planung. Sie folgt stattdessen der üblichen Abgrenzung, um meine Überlegungen nachvollziehbar zu machen.

2.1. Didaktische Überlegungen

Wieso sind Glücksspiele ein geeignetes Objekt für ein mathematisches Projekt mit Schülern? Welche mathematischen Inhalte können sie an den ausgewählten Spielen entdecken? Dies sind die beiden Kernfragen, die ich in diesem Abschnitt beantworten möchte. Erst im Anschluss daran werde ich in einer kurzen Sachanalyse einen Begriff beleuchten, der die Untersuchung von Glücksspielen in einen größeren mathematischen Zusammenhang einbettet.

2.1.1. Reichhaltige Lernsituation – Einbettung guter Probleme

Timo Leuders gibt einige Kriterien „guter“ Probleme für den Mathematikunterricht an. Demnach soll ein Problem so gewählt sein, dass es allgemeine mathematische Ideen und Begriffe verständlich macht, Anlass zu individuellen Erkundungen und divergentem Arbeiten bietet, in einen leicht zugänglichen Kontext eingebettet ist und die Schüler die Lösungsstrategien selbst entwickeln müssen.[4]
Die von Leuders beschriebenen guten Probleme sollten in dem Projekt in einer reichhaltigen Lernsituation für die Schüler auffindbar sein. Der Begriff der Lernsituation ist dabei weiter gefasst als die oben beschriebenen guten Probleme. Die Lernsituation umfasst, wie Rüdiger Vernay beschreibt, Materialien und Methode.[5]
In der Planung dieses Projektes war eine meiner ersten Aufgaben, Untersuchungsgegenstände zu finden, die zu einer reichhaltigen Lernsituation führen können. Die Schüler sollten innerhalb dieser Lernsituation „gute“ Probleme selbst auffinden und bearbeiten können. In einer Erweiterung der von Leuders genannten Kriterien soll die Lernsituation gewährleisten, dass die Schüler

- Raum für eigene Entdeckungen, Vermutungen und Umwege haben
- einen Bezug zur ihrer Lebenswelt und ihren Interessen finden können

[3] „Sie [die Projektmethode] möchte die Methode nicht als eine verselbstständigte Größe ansehen und damit auch nicht der Trennung von »Was« und »Wie« Vorschub leisten, wie es durch die begriffliche Scheidung von Didaktik und Methodik in der deutschen Pädagogik unglückseligerweise geschieht.“, FREY, S. 15
[4] vgl. LEUDERS, 2003, S. 123
[5] vgl. VERNAY, S. 4

- durch einen handlungsorientierten Zugang zu eigenen Fragen und Problemen und deren Bearbeitung finden
- die Möglichkeit haben, auf verschiedenen Niveaus zu arbeiten
- mathematische Arbeitsweisen in einem Kontext anwenden können
- Bedeutung und Sinnhaftigkeit der verwendeten mathematischen Begriffe erkennen
- das Erlernte auf eine andere Situation übertragen und so die Übertragbarkeit von Begriffen, Modellierungen und Lösungsstrategien erkennen können

Der von mir ausgewählte Projektgegenstand „Glücksspiele“ erfüllt diese Kriterien in besonderer Weise.

Raum für eigene Entdeckungen der Schüler

Die Projektarbeit war so angelegt, dass die Schüler selbst die Schwerpunkte ihrer Arbeit festlegen konnten. Sie konnten eigene Erfahrungen machen, Vermutungen nachspüren, Hypothesen aufstellen und mathematische Ideen testen. Der zeitliche Rahmen und die methodische Gestaltung boten den Schülern die Möglichkeit, Umwege zu gehen.
Die positiven Möglichkeiten einer projekthaften Arbeit konnten jedoch nur zum Tragen kommen, wenn es genügend zu entdecken gab und die Mathematik den Schülern zugänglich war. Daher habe ich in der Vorbereitung des Projektes eine umfangreiche Recherche zu Glücksspielen und der zugehörigen Mathematik gemacht.
Einige mathematisch interessante Spiele schieden mangels lebensweltlichem Bezug aus, andere Spiele, wie die Sportwette Oddset oder die Glücksspielautomaten, die in vielen Gaststätten aufgestellt sind, lassen sich mathematisch nur mit einem Aufwand modellieren, der den Rahmen dieses Projektes gesprengt hätte.[6]
Hinsichtlich der erwarteten Größe der Lerngruppe habe ich mich auf vier Glücksspiele beschränkt, die genügend mathematische Substanz für eine gewinnbringende Untersuchung durch Schüler hatten: Lotto, Keno, Roulette und Black-Jack.

Bezug zur Lebenswelt der Schüler

Einen deutlichen Hinweis, dass es einen Bezug des Themas „Mathematik der Glücksspiele“ zur Lebenswelt der Schüler gab, war darin zu sehen, dass die Schüler an dem Projekt teilnahmen. Die Einwahl in die Projekte der Projektwoche war für die Schüler frei. Soziale Gründe für die Wahl eines Projektes, wie man sie bei Schülern der Sekundarstufe 1 vermuten würde, scheinen mir bei Schülern der Oberstufe eine geringe Rolle zu spielen.

[6] vgl. MONKA; S. 242 f.

Ich machte bereits vorher in anderen Lerngruppen die Erfahrung, dass Glücksspiele für Schüler interessant waren, besonders dann, wenn die Möglichkeit bestand, Geld einzusetzen. Dies deckt sich auch mit anderen Beobachtungen außerhalb der Schule. So wurde die Lotterie Keno in einigen Bundesländern eingeführt, um die Zielgruppe von Jugendlichen und jungen Erwachsenen zu erreichen.[7]

Das Casino als Veranstaltungsort für Glücksspiele übt ebenfalls eine Faszination auf Jugendliche und junge Erwachsene aus. Wenige Wochen vor Durchführung des Projektes lief der Film „Oceans 12“ mit großem Werbeaufwand in Deutschland an. Ebenso wie der überaus erfolgreiche Vorgängerfilm „Oceans 11“ spielt dieser Film in der Welt der Casinos und Glücksspiele.

Möglichkeit eines handlungsorientierten Zugangs

Alle Spiele konnten im Rahmen des Projektes von den Schülern gespielt werden. Ich hatte entsprechendes Spielmaterial (Roulette-Spiel, Karten, Urne mit Kugeln, usw.) bereitgestellt. Besonders zu Beginn des Projektes wollte ich den Schülern (und mir selbst) ausgiebig Raum zum Spielen geben. So sollten sich die Schüler mit den Spielregeln vertraut machen, erste Erfahrungen sammeln und Fragen oder Vermutungen aufstellen können. Das Spielmaterial stand während des ganzen Projektes zur Verfügung, so dass die Schüler immer wieder ihren Fragen nachspüren, ihre Modellierungen anpassen und ihre Ergebnisse testen konnten.

Weiterhin organisierte ich einen Besuch der Spielbank in Bad Homburg, bei dem die Schüler im Rahmen einer Führung eine Einweisung in die Spiele Black Jack und Roulette durch Angestellte der Spielbank erhielten. Auch dies bot einen handlungsorientierten Zugang zur Untersuchung der Spiele.

Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus

Da ich die Lerngruppe erst zu Beginn der Projektwoche kennen lernte war die Anforderung, ein Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus zu ermöglichen, ganz besonders wichtig.

Die Schüler konnten ihre Betätigungsfelder selbst festlegen und hatten so die Möglichkeit, auf ihrem Niveau zu arbeiten. Die ausgewählten Spiele boten einerseits Gelegenheit, unterschiedliche Arbeitsweisen zu verwenden und hatten andererseits genügend Substanz, um sowohl einfachen Fragestellungen, wie der Ermittlung von Gewinnwahrscheinlichkeiten, oder auch komplexeren Arbeiten, wie statistischen Analysen oder Simulationen, nachzugehen.

[7] „Die Lotterie [Keno] wird vor allem über das Internet gespielt und richtet sich an Jugendliche bzw. junge Erwachsene.“, BÜCHTER, S. 40

Mathematische Arbeitsweisen in einem Kontext

Hans Freudenthal charakterisiert die Stochastik als „Musterbeispiel [für] ... wirklichkeitsnahe und beziehungsreiche Mathematik."[8] Die Analyse von Glücksspielen bietet ein besonders reiches Feld für die mathematische Modellbildung. Wichtige mathematische Begriffe tauchen in ihrem historischen Kontext auf. Aus der Beobachtung von Spielverläufen konnten die Schüler Ideen entwickeln und durch eine Quantifizierung ein mathematisches Modell bilden. Innerhalb des Modells konnten nun Aussagen und Strategien entwickelt und untersucht werden. Die Tragfähigkeit des Modells und der im Modell erarbeiteten Aussagen konnten schließlich wieder am Spiel überprüft werden. So wurden auch die Grenzen des Modells ausgelotet.

Dieses Vorgehen - Analyse einer Fragestellung, mathematische Modellierung, Untersuchung von Aussagen im Modell und anschließende Überprüfung der Aussagen an der realen Situation - ist die typische Arbeitsweise in der angewandten Mathematik.[9]

Die verschiedenen Spiele boten Raum für unterschiedliche mathematische Arbeitweisen, die ich weiter unten beschreiben werde.

Bedeutung und Sinnhaftigkeit der verwendeten mathematischen Begriffe

Der historische Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Glücksspielen ist wohlbekannt. Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie entstand aus der Untersuchung von Glücksspielen.[10] Die Untersuchung von Glücksspielen bot den Schülern somit einerseits die Möglichkeit, wichtige Grunderfahrungen zu sammeln. Die hier gemachten Erfahrungen und entwickelten Konzepte tragen weit in andere Gebiete der Stochastik.[11] Andererseits lernten die Schüler wichtige Begriffe in ihrem historischen Entstehungskontext kennen.

Zunächst konnten die Schüler Begriffe in einer konkreten Anwendungssituation benutzen, vielleicht sogar eigene Begriffe entwickeln. Die Sinnhaftigkeit war somit für die Schüler durch die gewinnbringende Verwendung bei einer konkreten Untersuchung belegt. Einige Begriffe konnten dann später auf andere Gebiete übertragen werden. BÜCHTER und HENN beschreiben beispielsweise, wie Lernende bei einer Untersuchung der Genueser Lotterie intuitiv das Konzept des Erwartungswertes entwickelten.[12]

---

[8] Zitiert nach BÜCHTER, S. 28

[9] LEUDERS und MAAß beschrieben diese Schritte als Modellierungskreislauf. vgl. LEUDERS, 2005, S. 3. ff

[10] vgl. ORE, S. 409 ff. und GLICKMANN, S. 50

[11] „Zur Entwicklung von tragfähigen Grundvorstellungen plädiere ich bewusst für Münze, Würfel, Reißzwecke, Glücksrad, Roulette, Kartenspiele, Lotto und Strümpfe [...] Allein daraus ergibt sich eine große Vielfalt von Standardmodellen, auf die in Anwendungssituationen zurückgegriffen werden kann.", HERGET, S. 7

[12] vgl. BÜCHTER, S. 33 f.

Übertragbarkeit des Erlernten auf einen größeren Komplex

Eine der Forderungen von Leuders ist, dass allgemeine mathematische Ideen und Begriffe verständlich gemacht werden. Im Rahmen der Untersuchung von Glücksspielen kann dies bedeuten, dass die Begriffe und Vorgehensweisen aus diesem Teilbereich auf andere Gebiete übertragbar sind.
Wie in Abschnitt 2.1.3 beschrieben, gibt es viele stochastische Modelle, auf die Erkenntnisse aus der Analyse von Glücksspielen übertragbar sind. Ein Beispiel ist das Binomialbaum-Modell zur Bewertung einer Aktien-Option, das ich beispielhaft behandelt habe. Dies gab den Schülern Anlass und Möglichkeit, die bei der Untersuchung von Glücksspielen entdeckten Konzepte auf eine andere Fragestellung zu übertragen.

2.1.2. Die ausgewählten Glücksspiele

Ich hatte eine Vorauswahl von vier Glücksspielen getroffen, um die Komplexität des Projektes zu reduzieren, wie es Eberhard Lehmann beschreibt.[13] Dies vereinfachte meine Vorbereitung. Einerseits musste ich Material sammeln und bereithalten, um es den Schülern in geeigneten Momenten geben zu können. Andererseits musste ich die mathematische Modellierung der Spiele durchdenken, um geeignete und ungeeignete Spiele zu unterscheiden. Viele vermeintliche Glücksspiele sind keine echten Glücksspiele, sondern Mischformen aus Strategie- und Glücksspielen.[14] In den mathematischen Gefilden, die Strategiespiele untersuchen, insbesondere der Teildisziplin Spieltheorie, bin ich jedoch selbst zu wenig Fachmann, um hier den Schülern beratend zur Seite stehen zu können.
Andere Spiele lassen sich zwar prinzipiell stochastisch modellieren, allerdings ist der Modellierungsaufwand immens. Die Untersuchung eines Münzspielautomaten würde beispielsweise eine lange Messreihe voraussetzen und die möglichen Erkenntnisse, die Schüler dabei erlangen können, sind für mich nicht vorhersehbar.[15]
Die Spiele sollten Interesse bei den Schülern wecken, eine mathematische Untersuchung durch Schüler zulassen und genügend Substanz für Entdeckungen haben. Im Hinblick auf die erwartete Teilnehmerzahl wählte ich vier Glücksspiele aus: Die Lotterie „6 aus 49", die Lotterie Keno, Roulette und Black-Jack. Alle vier Spiele sind derzeit in Deutschland verbreitet und ich konnte sie den Schülern im Projekt zugänglich machen. Ein weiteres wichtiges Kriterium war, dass alle Spiele um Geld gespielt werden. Dies bot die Möglichkeit, sie hinsichtlich der Gewinnmöglichkei-

[13] vgl. LEHMANN, S. 11 f.
[14] BEWERSDORF unterscheidet Glücksspiele, Strategiespiele und kombinatorische Spiele und ordnet Skat oder Poker Eigenschaften aller drei Spieltypen zu.
[15] vgl. MONKA, S. 242 ff.

ten miteinander zu vergleichen. Dass die Schüler auch anderen als den im Folgenden beschriebenen Fragestellungen nachspüren würden, hatte ich vermutet und gehofft.
Die Spielregeln der Spiele und Teile des Spielmaterials sind im Anhang A-3 zu finden.

2.1.2.1. Lotto

Die Lotterie „6 aus 49“ ist das meist gespielte Glücksspiel in Deutschland.[16] Wahrscheinlich würde sie allen Schülern bekannt sein. Seit der Einführung der „Super 6“ sind die Jackpot-Summen immer wieder auf Summen über 10 Millionen, teilweise sogar über 20 Millionen Euro angewachsen. Dies führt regelmäßig zu Berichten in den Medien. Ähnliche Lotterien werden in vielen anderen europäischen Ländern veranstaltet. Wenige Tage vor Beginn des Projektes machte eine italienische Lotterie Schlagzeilen in der Tagespresse.[17] MONKA beschreibt zahlreiche populäre Irrtümer und Strategien rund um das Lottospiel, die schnell zu kontroversen Diskussionen führen.
Dies und der sprichwörtliche „Sechser im Lotto“ schienen mir genügend Kriterien dafür zu sein, dass Lotto ein Spiel ist, das auf das Interesse der Schüler stoßen könnte.
Bei der Lottoziehung „6 aus 49“ werden einmal wöchentlich in einer öffentlichen Ziehung sechs Kugeln aus einer Urne mit neunundvierzig Kugeln gezogen. Jede Kombination ist dabei gleich wahrscheinlich. Die Lottoziehung ist demnach ein „Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge“. Die Wahrscheinlichkeit für k richtige ist:

$$\frac{\binom{6}{k}\cdot\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

Da jede einzelne Kugel mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen wird, folgt aus dem Gesetz der großen Zahlen, dass die relative Häufigkeit für die Ziehung jeder Kugel gegen $\frac{1}{49}=0,0204=2,04\%$ konvergiert. Die tatsächlich realisierten absoluten Häufigkeiten der gezogenen Zahlen werden jede Woche veröffentlicht und führen zu deutlich unterschiedlichen Werten.[18] Eine nahe liegende aber falsche Vermutung ist, dass man diese Abweichung ausnutzen kann, um etwas über die Wahrscheinlichkeit der nächsten Ziehung zu erfahren.[19]

---

[16] vgl. MONKA, S. 250 f.
[17] So berichtete die Frankfurter Rundschau am 19.01.2005 unter der Überschrift „Banker stiehlt eine Million fürs Lottospiel“ von dem Spielverhalten in Italien. Dort war seit 176 Ziehungen die Zahl 53 nicht mehr gezogen worden, und dies schien vielen Italienern ein Garant dafür, dass diese Zahl nun bald kommen würde.
[18] Bis zum 22.Januar 2004 wurden 2788 Ziehungen durchgeführt. Die 13 hat eine relative Häufigkeit von 1,72%, die 32 von 2,34%. Zahlen aus der Zeitschrift „Glück“, Nr. 4, vom 25.01.2005
[19] vgl. MONKA, S. 13 ff.

Ein anderes interessantes Untersuchungsobjekt ist der erwartete Gewinn im Falle eines „Sechsers“. Der erwartete Gewinn ist schwer zu bestimmen, da die ausgeschüttete Gewinnsumme einerseits von der Höhe der eingenommenen Spielgebühren abhängt und andererseits die Gewinnsumme einer Gewinnklasse unter allen Gewinnern aufgeteilt wird. Besonders Letzteres macht das Lottospiel zu einem mathematisch interessanten Objekt.
Michael Monka et al. haben das Tippverhalten von Spielern analysiert und daraus Rückschlüsse auf Zahlen und Zahlenkombinationen gezogen, die man meiden sollte, da sie von vielen Spielern getippt werden.[20]
Die Untersuchung der Lotterie „6 aus 49“ bot den Schülern eine Gelegenheit, kombinatorische Grundaufgaben anzuwenden, um die Gewinnwahrscheinlichkeiten zu berechnen. Darauf aufbauend konnten Überlegungen über den erwarteten Gewinn gemacht werden, die zu Untersuchungen des Tippverhaltens der Spieler führen konnten.
Der Vergleich der Wahrscheinlichkeit für das Ziehen jeder Kugel mit der realisierten relativen Häufigkeit konnte Einblicke in das Gesetz der großen Zahlen und das Phänomen zufälliger Schwankungen um einen Grenzwert bringen. Hier konnten Grunderfahrungen zur Gedächtnislosigkeit stochastischer Vorgänge gemacht werden.
Schließlich bietet die Untersuchung von günstigen und ungünstigen Zahlen und Zahlenkombinationen ausreichend Anlass zur Datenanalyse. In diesem Rahmen konnten die Schüler Methoden und Ideen aus der Statistik verwenden.

2.1.2.2. Keno

Die Lotterie Keno wird seit Anfang 2004 in einigen Bundesländern, darunter auch Hessen, angeboten. Die Zielgruppe der hauptsächlich über das Internet gespielten Lotterie sind vor allem Jugendliche und junge Erwachsene. Die Tatsache, dass die Zahlen von einem Rechner bestimmt werden, ließ die Vermutung zu, dass man das Berechnungsschema mit geeigneten mathematischen Hilfsmitteln „knacken“ könnte. Diese Umstände machten Keno zu einem interessanten Untersuchungsobjekt für das Projekt.
Die Gewinnwahrscheinlichkeit für k Zahlen bei t getippten Zahlen, lässt sich durch eine hypergeometrische Verteilung beschreiben:

$$\text{Wahrscheinlichkeit("k richtige Zahlen bei t getippten Zahlen")} = \frac{\binom{t}{k} \cdot \binom{70-t}{20-k}}{\binom{70}{20}}$$

Neben der Überlegung, wie wahrscheinlich ein Gewinn ist, ist vor allem die Frage interessant, ob man die Zahlen vorhersehen kann. Rund um den Start der Keno-Lotterie beschäftigten sich

[20] vgl. MONKA, S. 33 ff.

zahlreiche Zeitungsartikel mit dem Rechner, der die Zahlen bestimmt. Eng damit verbunden sind Fragen nach dem Wesen des Zufalls und der Erzeugung von (Pseudo-)Zufallszahlen.
Die Untersuchung der Keno-Lotterie bot den Schülern zunächst Gelegenheit, Wahrscheinlichkeiten durch kombinatorische Überlegungen zu bestimmen. Da bei dieser Lotterie die Gewinnsummen fest stehen, konnten die Schüler darauf aufbauend erwartete Gewinne berechnen und so den Begriff des Erwartungswertes anwenden.
Der Ziehungsvorgang bei Keno führt zu Fragen nach dem Wesen des Zufalls und seiner mathematischen Beschreibung. Dies konnte auf der einen Seite zur statistischen Untersuchung der gezogenen Zahlen führen oder andererseits zu Fragen um die Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen. Hier hätten dann Verfahren wie der Mid-Square-Generator für die Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen oder der Pair-Test zur Untersuchung von Zufallszahlen zur Verfügung gestanden.[21]

2.1.2.3. Roulette

Das Roulettespiel wird fast ausschließlich in Spielbanken gespielt und steht sinnbildhaft für Casino und Glücksspiel. Die Spielregeln sind einfach, der Ziehungsvorgang am großen Kessel ist sinnlich erfahrbar. Für Gewinnstrategien spielen sowohl persönliche Glückszahlen als auch ein vermeintliches Wissen über das Gesetz der großen Zahlen eine wichtige Rolle. Ich machte bereits vor der Planung des Projekts mehrfach die Erfahrung, dass Schüler selbst Roulette-Strategien entwickelten und diese mathematisch hinterfragten.
Aus den genannten Gründen vermutete ich, dass Roulette ein für die Schüler interessantes Objekt zur mathematischen Untersuchung sei.
Mathematisch gesehen stellen die Ziehungen stochastisch unabhängige Realisierungen einer auf den Zahlen 0 bis 36 gleichverteilten Zufallsvariable dar. Die Wahrscheinlichkeit der zusammengesetzten Ereignisse lassen sich aus den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bestimmen. Auch komplexere oder mehrstufige Spielstrategien lassen sich leicht modellieren.
Mit geringem mathematischen Aufwand kann man zeigen, dass der erwarte Gewinn beim Spielen einfacher Chancen (Rouge/Noir, Passe/Manque, Pair/Impair) das -0,0135fache des Einsatzes ist. Für die anderen Setzmöglichkeiten ist der erwartete Gewinn sogar noch schlechter: das -0,027fache des Einsatzes. [22]
Einfache Überlegungen führen schnell zu der populären Spielstrategie, die als „Progression“ oder „Petersburger Strategie“[23] bekannt ist. Diese Überlegungen basieren auf der Tatsache, dass rote und schwarze Zahlen gleich wahrscheinlich sind. Eine tiefere mathematische Analyse

---

[21] Der Mid-Square-Generator ist in Anhang A-2.3 beschrieben.
[22] vgl. MONKA, S. 173 ff.
[23] Diese Spielstrategie wird auch als „Martingal-Spiel“ bezeichnet. Um Verwechslungen mit dem mathematischen Begriff zu vermeiden, verwende ich für die Roulette-Strategie jedoch den Namen „Progression“.

zeigt allerdings, dass einerseits das notwendige Kapital und andererseits das Tischlimit diese Strategie für die Praxis unbrauchbar macht.[24]

Die Untersuchung des Roulettespiels bot den Schülern die Gelegenheit, Grunderfahrungen über stochastisch unabhängige Zufallsexperimente zu sammeln. Insbesondere im Bereich der Begriffe „empirische relative Häufigkeit", „mathematische Wahrscheinlichkeit" und „Gesetz der großen Zahlen" konnten hier wichtige und weit tragende Einsichten erlangt werden.

Die Untersuchung verschiedener Spielarten bot den Schülern die Gelegenheit, die erwarteten Gewinne miteinander zu vergleichen und so den Begriff des Erwartungswertes zu untersuchen. Im Falle der „Progression" konnte die mathematische Modellierung zu Überlegungen über (unendliche) Summen führen.

Die von den Spielbanken veröffentlichten Permanenzen (die Ziehungsergebnisse der Roulettetische) boten Raum und Anlass für statistische Untersuchungen im Rahmen derer die Schüler Ideen, Techniken und Begriffe der Datenanalyse entwickeln und anwenden konnten.

2.1.2.4. Black-Jack

Das Spiel Black Jack ist neben Roulette ein typisches Glücksspiel, das in Spielbanken gespielt wird. Ebenso wie beim Roulette besteht dadurch bereits Interesse. Black Jack wird in zahlreichen Filmen aufgegriffen, so zum Beispiel in dem Film „Rainman" in dem eine Figur mit einer mathematischen Inselbegabung eine große Geldmenge in Las Vegas erspielt.

Das Spiel ist mit dem Kartenspiel „17 und 4" nahe verwandt, das sicher einigen Schülern bekannt war. Ein besonderer Reiz beider Spiele liegt darin, dass der Spieler einen direkten Gegner - die Bank – hat und in der Tatsache, dass nach und nach Karten gezogen werden.

Aus mathematischer Sicht ist dieses Spiel besonders interessant, da man aufgrund von Wahrscheinlichkeitsüberlegungen Entscheidungsratschläge für den Spieler formulieren kann.

Da der Spieler alle Karten kennt und somit auch die im Deck verbliebenen Karten, kann die Wahrscheinlichkeit eines Ausgangs durch Abzählen bestimmt werden. Dies führt zur Bestimmung von bedingten Wahrscheinlichkeiten, gegeben die offenen Karten. Durch Aufstellen eines entsprechenden Baumdiagrammes können die bedingten Wahrscheinlichkeiten für Punktsummen der Bank, gegeben die erste Karte, berechnet werden. Im Anhang A-3.3 ist eine entsprechende Tabelle angegeben.

Ähnliche Tabellen können auch bedingt auf die bisherigen Karten des Spielers erstellt werden und so zu Ratschlägen führen, ob der Spieler eine weitere Karte nehmen soll oder nicht.[25]

Die Untersuchung von Black Jack sollte den Schülern die Möglichkeit geben, Grunderfahrungen mit mehrstufigen Zufallsexperimenten zu sammeln. Hier sollten sie den Begriff der bedingten

[24] vgl. HEFENDEHL-HEBECKER, S. 210 ff.
[25] vgl. MONKA, S. 67 ff.

Wahrscheinlichkeit entwickeln und darauf aufbauend bedingte Gewinnerwartungen berechnen können. Bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten sollten sie kombinatorische Überlegungen anstellen und so beispielsweise Baumdiagramme mit den entsprechenden Pfadregeln anwenden können.

Eine andere, für stochastische Überlegungen typische Arbeitsweise bot sich hier ebenfalls an: die Computersimulation. Hier konnten die Schüler die Modellierung des Spieles in einer Simulation kennen lernen und sich mit der typischen Frage des Umfanges der Simulation beschäftigen.

2.1.3. Mathematische Hintergründe – Martingale

Die Stichworte „Unabhängigkeit von Ereignissen" und „Erwartungswert" finden sich im Lehrplan Mathematik.[26] Der Begriff des Martingals verknüpft und erweitert diese beiden Begriffe und ist zudem auf vielfältige Weise mit den Glücksspielen verbunden.[27]

Ein Martingal ist ein reellwertiger stochastischer Vorgang $Z = (Z_n)_{,n=0,1,...}$, der „im Mittel" konstant bleibt. Das „Mittel" ist hierbei der auf den bisherigen Vorgang bedingte Erwartungswert: [28]

$$E\left[Z_{n+1} \mid Z_n, Z_{n-1}, ...\right] = Z_n$$

Die Relevanz des Martingal-Begriffs für die Untersuchung von Glücksspielen wird aus folgender Interpretation klar:

Ein Glücksspiel ist fair (für alle Beteiligten), wenn der erwartete Gewinn jederzeit gleich dem erwarteten Verlust ist.[29] Habe ich im n-ten Schritt eines fairen Spiels einen Gewinn von X Euro, so erwarte ich im nächsten Schritt immer noch X Euro zu haben. Mit der oben beschriebenen Gleichung ist demnach ein Glücksspiel, modelliert als Folge zufälliger Gewinne oder Verluste $Z_{n,n=0...}$, genau dann fair, wenn es ein Martingal ist.

Die Tragweite dieses Zusammenhangs geht weit über die Untersuchung gewöhnlicher Glücksspiele hinaus. Kann nämlich ein Prozess als Martingal entlarvt werden, so lässt er eine Interpretation als faires Spiel zu. Dies wird umso bedeutsamer, da die Martingaleigenschaft in vielen stochastischen Zusammenhängen entscheidend ist.[30]

---

[26] vgl. Lehrplan Mathematik, S. 61 f.

[27] Bereits der Verwendung des Worts „Martingal" zeigt den engen Zusammenhang zwischen Glücksspielen und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ursprünglich bezeichnet das Martingal ein Teil des Zaumzeugs von Pferden und wird dann als Name einer Spielstrategie beim Roulette benutzt. So beschreibt der Oxford English Dictionary in der Ausgabe von 1815 das Martingal "a system in gambling which consists in doubling the stake when losing in the hope of eventually recouping oneself." Später wurde dieses Wort dann für spezielle stochastische Prozesse verwendet. (vgl. MILLER)

[28] Für die mathematisch rigorose Definition des Martingals sei auf den Anhang verwiesen.

[29] Ich orientiere mich hier an der Beschreibung eines fairen Spiels von FELLER (S. 248 ff), wobei ich die Endlichkeit der Varianz hier nicht thematisieren möchte. Siehe hierzu Anhang A-2.1.

[30] „[...] it is very helpful to view all martingales, [...] in terms of gambling. But, of course, the enormous importance of martingale theory derives from the fact that martingales crop up in very many contexts."; WILLIAMS, S. 94, f.

Die bei der Untersuchung von Glücksspielen gemachten Erkenntnisse über die Bedingungen unter denen ein Spiel für alle Beteiligten fair ist, lassen sich somit in vielen wichtigen Zusammenhängen wieder finden. Die Optionsbewertung ist lediglich ein prominentes Beispiel.

2.2. Methodische Überlegungen

Rüdiger Vernay beschreibt eine reichhaltige Lernsituation notwendig als Zusammenspiel von ausgewähltem Material und methodischer Umsetzung in der veränderte Lehrer- und Schülerrollen gefordert sind:

> „Schülerinnen und Schüler brauchen mehr Freiräume für eigenes Tun, sie müssen mehr Verantwortung für ihr Lernen übernehmen. Die Lehrperson wird sich dabei mehr und mehr vom zentralen Lenker zum Berater und Beobachter entwickeln."[31]

Das beschriebene Rollenverhältnis ist in der Projektmethode besonders deutlich ausgeprägt.

2.2.1. Die Projektmethode

Bei den folgenden Beschreibungen der Projektmethode orientiere ich mich im Wesentlichen an der Darstellung von Karl Frey. In einigen Punkten gehe ich auf mathematische Projekte, wie Eberhard Lehmann sie beschreibt, ein.

2.2.1.1. Die Komponenten eines Projektes

Karl Frey beschreibt sieben Komponenten eines Projektes. Die ersten fünf Komponenten sind logisch und zeitlich aufeinander folgende Phasen. Die Komponenten sechs und sieben stellen organisatorische oder pädagogische Überblicks- und Sammelphasen dar.

Komponente 1 – Die Projektinitiative

Zu Beginn jeden Projektes steht die Projektinitiative. Sie ist eine offene Ausgangssituation, in der noch nicht geklärt ist, ob es zu einem Projekt kommen wird und wer an dem Projekt beteiligt sein wird. Die Offenheit der Ausgangssituation verlangt von allen Teilnehmern, sich auf nicht vorhersehbare Fragen und Probleme einzulassen.

Als Sonderform eines Projektbeginns beschreibt Karl Frey die Offene Ausgangssituation mit vorausgeplanten Projektschwerpunkten.[32] Diese tritt meist im Projektunterricht auf, wenn fachliche oder didaktische Eingrenzungen einer völlig offenen Ausgangssituation widersprechen. Hier legt der Projektleiter im Rahmen der Projektinitiative bereits Schwerpunkte fest.

---

[31] VERNAY, S. 4
[32] vgl. FREY, S. 113

Eberhard Lehmann beschreibt diese Schwerpunktsetzung für Mathematik-Projekte unter dem Stichwort „Reduktion von Komplexität“. Diese Reduktion sei eine der wesentlichen Tätigkeiten des Lehrers, da die Komplexität wesentlich über das Gelingen eines Projektes entscheidet.[33]

Komponente 2 - Auseinandersetzung mit der Projektinitiative

Die Auseinandersetzung mit der Projektinitiative findet auf zwei Ebenen statt. Auf der Ebene des Projektrahmens klären die Teilnehmer zeitliche und organisatorische Bedingungen. Auf der inhaltlichen Ebene versuchen sie, die Projektinitiative nachzuvollziehen und bringen eigene Wünsche, Bedenken und Vorbehalte ein. Es geht darum, dass die Teilnehmer „die Initiative mit ihrer eigenen Welt verbinden.“[34]

Komponente 3 – Entwicklung eines Beschäftigungsfeldes

In dieser Phase machen die Teilnehmer aus der Projektinitiative ihr eigenes Projekt, in dem sie realisierbare Vorhaben konkretisieren und notwendige Voraussetzungen und Wünsche für ihre Tätigkeiten beschreiben. Im Rahmen mathematischer Projekte können die Schüler so auch das Niveau ihrer Untersuchungen festlegen.
Ist das Erstellen eines Produktes als Abschluss des Projektes geplant, sollte dies spätestens in der Entwicklung eines Beschäftigungsfeldes beschrieben werden, damit die Aktivitäten mit der Produkterstellung abgeglichen werden können.
Die Phase der Entwicklung des Beschäftigungsfeldes hat als Ergebnis einen Projektplan. Dieser hält die geplanten Aktivitäten und die notwendigen Voraussetzungen fest und strukturiert die Projektdurchführung.

Komponente 4 – Projektdurchführung

Die Projektdurchführung ist das Kernstück des Projektes. Hier arbeiten die Schüler selbstständig gemäß ihres Projektplanes. Der Lehrer wird zum „Hintergrundlehrer“, der beratend und helfend aktiv ist. Die konkrete Handlung, die erlebte Zusammenarbeit und die Konzentration auf eine gemeinsame Sache sind die wichtigsten Merkmale dieser Phase.
Die Projektdurchführung lässt verschiedene Arbeitsformen wie Einzel- oder Partnerarbeit zu, herausgehoben ist jedoch die Gruppenarbeit: „Die Fähigkeit in einer Gruppe weitgehend selbstständig und ohne kontrollierende Aufsicht zu arbeiten, ist eine Schlüsselqualifikation für Projekte.“[35]

---

[33] vgl. LEHMANN; S. 12
[34] FREY, S. 79
[35] FREY, S. 118

Die Grenzen zwischen der Projektdurchführung und der Entwicklung von Beschäftigungsfeldern sind fließend. Die Planung ist keine einmalige Phase. Sie begleitet das Projekt, da sich die Beschäftigungsfelder der Schüler im Verlaufe der Projektdurchführung ändern können.

Komponente 5 – Beendigung des Projektes

Frey nennt als mögliche Formen zur Beendigung des Projektes den bewussten Abschluss, die Rückkopplung zur Projektinitiative und das Auslaufenlassen. Ein bewusster Abschluss liegt vor, wenn die Projektteilnehmer das Erstellen eines Produktes geplant haben. Mit der Fertigstellung des Produktes ist das Projekt zu diesem bewussten Abschluss gekommen.
Mathematik-Projekte, so Eberhard Lehmann, sollen stets produktorientiert sein. Nur so sei zu gewährleisten, dass die Projektteilnehmer den Antrieb erhalten, das Projekt durchzustehen. Das Produkt soll die Arbeitsergebnisse dokumentieren und aufbereiten.[36]

Komponente 6 – Fixpunkte

Die Fixpunkte bilden organisatorische Schaltstellen im Verlauf des Projektes. Der offene Verlauf des Projektes verlangt Einschübe, an denen der organisatorische und fachliche Überblick sichergestellt wird. Hier informieren die Teilnehmer über ihre letzten Tätigkeiten, vergegenwärtigen sich den Stand ihrer Arbeit, sammeln Ideen und Anregungen für den weiteren Verlauf des Projektes und melden notwendige organisatorische Schritte für den Fortgang.
Für Mathematik-Projekte sind die Fixpunkte wichtig, damit der Lehrer auf fachliche Probleme eingehen kann, beziehungsweise diese antizipieren kann. Bei Problemstellungen aus der angewandten Mathematik können leichte Änderungen der Fragestellung zu grundlegend anderen Problemen führen, deren Untersuchung eines anderen Vorwissens oder neuer organisatorischer Schritte bedarf.

Komponente 7 – Metainteraktion

Die Metainteraktion hat eine besonders wichtige Aufgabe. In ihr wird die Aktivität im Projekt in einen größeren Zusammenhang gestellt und somit qualifiziert: „Sie [die Metainteraktion] trägt dazu bei, dass das Tun pädagogisches Tun wird.“[37]
Frey nennt verschiedene Zwecke der Metainteraktion. Für mathematische Projekte scheint mir besonders die Vertiefung eines Strangs der ablaufenden Aktivitäten wichtig zu sein. Die an einer untersuchten Fragestellung gemachten Erfahrungen, die gebildeten Begriffe und die entdeckten Zusammenhänge können durch eine solche Vertiefung reflektiert und in einen größeren Kontext eingebettet werden.

---

[36] vgl. LEHMANN, S. 6
[37] FREY, S. 131

2.2.1.2. Die Rollen der Schüler und des Lehrers

Sowohl Lehrer als auch Schüler haben in der Projektmethode andere Rollen als im üblichen Unterricht. Dies ist für die Planung und die Durchführung eines Projektes entscheidend. Der Lehrer hat nicht mehr zentral die Rolle des Wissensvermittlers. Vielmehr wird sie als die eines Projektmanagers (Lehmann) oder Hintergrundlehrers (Frey) beschrieben. Der Schüler ist nun nicht mehr Konsument und Anwender von Information, er muss aktiv werden und erhält mehr Verantwortung für seinen Lernzuwachs.

Die Beschreibung des Lehrers als Projektmanager unterstreicht seine Aufgabe, das Projekt zu steuern und Strukturen sicherzustellen. Wesentliche Tätigkeiten des Lehrers finden bereits im Vorfeld, bei Planung und Organisation, statt. Lehmann formuliert für Projekte mit mathematischen Themen u.a. folgende Aufgaben des Lehrers:[38]

- Auswahl des Projektthemas
- Leitung bei der Präzisierung von Aufgabenstellungen
- Organisation von Zwischenberichten
- Bereitstellung von den Schülern nicht bekannten mathematischen und anderen Hilfsmitteln

Gegenüber dem normalen Unterricht, so Lehman, erfordert die Durchführung eines mathematischen Projektes den Mut des Lehrers, sich neuen Anforderungen didaktischer und methodischer Art zu stellen, einen möglicherweise ungewissen Ausgang zu erleben und überraschende Situationen und Probleme zu bewältigen.

Freys Beschreibung des Lehrers als Hintergrundlehrer unterstreicht die Rolle des Beraters, der den Schülern bei der Projektdurchführung zur Seite steht. Entscheidend ist hier, dass der Lehrer weder zu stark in die Projektdurchführung eingreift noch Hilfe vorenthält, wenn sie gebraucht wird. Er muss vermeintlich unproduktive Phasen aushalten.[39]

Während der Projektdurchführung hat der Lehrer die Möglichkeit sich als „normaler“ Teilnehmer in die Arbeit zu integrieren. Er arbeitet dann wie die anderen Mitglieder im Team mit. Zu bedenken ist hierbei allerdings, dass es durch seine sonst übliche Rolle den Schülern schwer fällt, ihn als normales Mitglied zu akzeptieren.

Auch die Schülerrolle ist in der Projektmethode gegenüber dem üblichen Unterricht verändert. Durch die Möglichkeit, gemäß der eigenen Fähigkeiten und Interessen Betätigungsfelder zu wählen, erhält der Schüler mehr Verantwortung für seinen Lernerfolg. Dies wird besonders dadurch deutlich, dass er selbst sein Handeln plant.

---

[38] vgl. LEHMANN, S. 7

[39] vgl. FREY, S. 164 ff.

Während der Projektdurchführung muss der Schüler selbstständig arbeiten und kann bei der Untersuchung von Fragen und Problemstellungen nicht auf die schnelle Hilfe, vielleicht sogar Lösung, durch den Lehrer hoffen. Dies erfordert eine höhere Frustrationstoleranz.
Wie bereits erwähnt ist die Fähigkeit zur Gruppenarbeit ein entscheidendes Kriterium für das Gelingen eines Projektes. Die Schüler müssen einerseits eigene Ideen und Meinungen in der Gruppe artikulieren und vertreten können und andererseits andere Meinungen aufnehmen können. Projektarbeit fordert und fördert die Teamfähigkeit der Schüler.

2.2.1.3. Eigenschaften der Projektmethode

Die Projektmethode hat einige allgemeine, vom fachlichen Inhalt unabhängige, Eigenschaften, die mir besonders wichtig erscheinen:

- statt Konkurrenzverhalten fördert sie eher Zusammenarbeit, Rücksichtnahme und gemeinsames Schaffen der Schüler
- sie befasst sich meist mit realen Situationen und Gegenständen, die auch außerhalb der Schule vorkommen
- sie orientiert sich besonders an den persönlichen Fähigkeiten des Schülers, um diese möglichst optimal entfalten zu können
- sie fördert die Koppelung schulischer und außerschulischer Bereiche

Eberhard Lehmann beschreibt weiterhin drei Intentionen des BLK-Modellversuchs „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“, die durch Projektunterricht in besonderem Maße unterstützt werden: die Weiterentwicklung der Aufgabenkultur, das verständnisvolle Lernen auf unterschiedlichen Niveaus und die Stärkung der Verantwortung für das eigene Lernen.
Durch die meist als Gruppenarbeit organisierte Projektdurchführung werden die Schüler in Gesprächssituationen gebracht. Dieses Sprechen über eine mathematische Fragestellung fördert die Bildung von Begriffen.
Besonders geeignet scheint mir die Projektmethode im Mathematikunterricht zu sein, wenn es um Modellbildung und die Vermittlung von Grunderfahrungen geht. Hingegen erscheint sie als ungeeignet, wenn stark vorstrukturierte Lernprozesse ablaufen sollen oder die Lernprozesse unter Zeitdruck ablaufen müssen.[40]

[40] vgl. FREY S. 177 f.

2.2.1.4. Projektmethode und Projektmanagement

Wie oben beschrieben kann die Rolle des Lehrers als die eines Projektmanagers beschrieben werden: er organisiert und strukturiert den Ablauf des Projektes. Der Begriff Projektmanager ist Projekten aus der Arbeitswelt entlehnt, in der sie zunehmend wichtiger werden.
Vor dem Referendariat war ich als Mathematiker in verschiedenen Projekten tätig, teilweise in deren Leitung. Einige meiner Erfahrungen aus dieser Zeit habe ich in dieses Unterrichtsprojekt einfließen lassen. Dies stellte keine Erweiterung Projektmethode, sondern lediglich eine Konkretisierungen in der Umsetzung dar.
Zur Dokumentation des Fortgangs der Projektdurchführung erstellte ich einen Projektplan, in dem die Schüler täglich die Ziele für den nächsten Tag schriftlich festhalten sollten. Pläne dieser Art sind in Projekten in der Arbeitswelt ein wichtiges Hilfsmittel, um den Projektverlauf zu dokumentieren und transparent zu machen.[41] Ein Blatt des Projektplans ist in Anhang A-4.1 abgebildet.
Als Konkretisierung der Komponente „Fixpunkte" plante ich eine tägliche „Heure fixe", in der die Schüler über den Stand ihrer Arbeit berichten und die geplanten Schritte erläutern sollten. In der Arbeitswelt sind in Projekten „Jour fixe" üblich, die zur Steuerung des Projektes und zur Kommunikation zwischen den einzelnen Projektteilnehmern dienen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Projekten in der Arbeitswelt und denen im Unterricht besteht in den unterschiedlichen Zielen. In der Arbeitswelt hat ein Projekt meist das Ziel, mit vorgegebenen zeitlichen, finanziellen und personellen Vorgaben ein Produkt (dies kann auch eine veränderte Arbeits- oder Organisationsstruktur sein) zu erzeugen.[42] Der Fortschritt in diesem Produktionsvorgang ist die wesentliche Stellgröße für den Projektmanager. Viele Ideen und Techniken der Projektsteuerung basieren auf dieser Stellgröße.
Ein Projekt im Unterricht hat das Ziel, bildend zu wirken. Die Erzeugung eines Produktes hat allenfalls einen Wert, wenn der Produktionsweg bildend ist. Dieser Bildungsprozess ist im Gegensatz zum Produktionsprozess kaum quantifizierbar.
Diese unterschiedlichen Zielvorgaben machen viele, aus dem Projektmanagement der Arbeitswelt bekannte, Ideen und Werkzeuge zur Projektsteuerung im Rahmen von Unterrichtsprojekten unbrauchbar.

[41] vgl. BIRKER, S. 56 ff.
[42] vgl. BIRKER, S. 8 ff.

2.2.2. Das Projekt "Glücksspiele und Stochastik"

2.2.2.1. Rahmenbedingungen

Das Projekt fand im Rahmen der Projektwoche der Bettinaschule zwischen dem 28. Januar und 03. Februar 2005 statt. Dieser Zeitraum lag zwischen Notenkonferenz und Ausgabe der Halbjahreszeugnisse. Die Schüler unseres Projektes waren täglich ca. 5 Zeitstunden anwesend.
Die Ergebnisse der Projektwoche sollten von allen Gruppen im Rahmen eines Tages der offenen Tür vorgestellt werden. Das Projekt „Glücksspiele und Stochastik" wurde von Herrn Feltin und mir angeboten. Die Einwahl der Schüler in die Projekte fand kurz vor den Weihnachtsferien statt. Die Teilnehmer an unserem Projekt waren uns erst einige Tage vor dem ersten Projekttag namentlich bekannt.
Um die Vorbereitung auf das Projekt zu erleichtern, hatten wir das Projekt nur für Schüler der Sekundarstufe II angeboten und die maximale Teilnehmerzahl auf 15 Schüler begrenzt. Für Schüler der Sekundarstufe I wurde ein Projekt „Glück und Spiel" angeboten, das neben einigen mathematischen Themen vor allem gesellschaftliche und psychologische Schwerpunkte hatte.
Für alle fünf Tage stand unserem Projekt ein eigener Raum zur Verfügung in dessen Nähe befand sich ein Computerraum ohne Internetzugang, den die Projektteilnehmer benutzen konnten, befand. Für drei Stunden hatte ich einen Computer mit Internetzugang reservieren können.
Die beiden Projekte „Glücksspiele und Stochastik" und „Glück und Spiel" unternahmen am 31.01.2005 eine gemeinsame Exkursion zur Spielbank Bad Homburg. Dort erhielten wir, außerhalb der Öffnungszeiten eine Führung, in deren Verlauf uns zwei Angestellte die Spiele Black-Jack und Roulette vorstellten.

2.2.2.2. Die Lerngruppe

Wie beschrieben war mir die Lerngruppe während der Planung nicht bekannt. Durch die Einschränkung, dass nur Schüler der Sekundarstufe II teilnehmen konnten, konnte ich jedoch diesbezüglich einige Vermutungen anstellen.
Der Titel des Projektes sagte deutlich aus, dass es um die mathematische Auseinadersetzung mit Glückspielen gehen würde. Ich erwartete daher, dass die Schüler ein Interesse an mathematischen Fragestellungen haben würden. Die zu untersuchenden Glücksspiele und die selbstständige Arbeit im Projekt ließen verschiedene Niveaus der Auseinandersetzung zu. Dies ermöglichte eine Binnendifferenzierung bezüglich des notwendigen Vorwissens und der Leistungsstärke.
Die Projektdurchführung plante ich als Gruppenarbeit. Ich erwartete, dass die Schüler in dieser Arbeitsform erfahren und in der Lage sein würden, selbstständig an einem Thema zu arbeiten.

2.2.2.3. Komponenten des Projekts „Glücksspiele und Stochastik“

Wie Karl Frey beschreibt, bergen die in Schulen durchgeführten Projektwochen häufig das Problem, dass für die Komponente „Auseinandersetzung mit der Projektinitiative“ und „Entwicklung eines Beschäftigungsfeldes“ der zeitliche Rahmen fehlt.[43]
Auch in diesem Projekt fand die Auseinandersetzung mit der Projektinitiative nicht als klar erkennbare Phase statt. Daher beschreibe ich sie nur unter dem Aspekt meiner Planung.

Projektinitiative

Die Idee zu diesem Projekt kam von meinem Kollegen Andreas Feltin. Nachdem ich entschieden hatte, dass dieses Projekt die Grundlage dieser Examensarbeit werden sollte, übernahm ich die Planung.
Wie ausgeführt, habe ich die Projektinitiative durch die Auswahl der Glücksspiele eingeschränkt. In der Darstellung von Karl Frey handelt es sich demnach um eine offene Ausgangssituation mit vorausgeplanten Schwerpunkten. Durch die Schwerpunktssetzung umging ich einige fachliche Probleme, die möglicherweise zu einem Scheitern des Projektes geführt hätten. Im Sinne von Lehmann ist dies eine Reduktion von Komplexität.

Auseinandersetzung mit der Projektinitiative

Die Auseinandersetzung mit der Projektinitiative fand von Seiten der Schüler vorrangig dadurch statt, dass sie das Projekt mit alternativen Projektangeboten der Projektwoche verglichen. Einige Schüler fragten auch im Vorfeld nach Inhalten und notwendigen Vorkenntnissen. Eigene Ideen und Betätigungswünsche wurden jedoch nicht geäußert.

Entwicklung des Betätigungsfeldes

Mit dieser Komponente begann die eigentliche Mitarbeit der Schüler an dem Projekt. Nach der Klärung von organisatorischen Fragen und einer Vorstellungsrunde, plante ich als Einstieg in das Thema eine offene Frage zu einem Glücksspiel von Cardano. Abschnitt 3.2 beschreibt diesen Einstieg.

Anschließend sollten die Schüler ihr erstes Beschäftigungsfeld entwickeln. Frey beschreibt die Entwicklung des Beschäftigungsfeldes so:

> „Sie [die Teilnehmenden] probieren etwas aus oder simulieren künftige Abläufe. [...] Sie beschäftigen sich konkretisierend und planend mit der Initiative, sodass sich allmählich herausschält, was die Teilnehmer/innen intensiver tun werden.“[44]

[43] vgl. FREY, S. 118 f.

In unserem Projekt musste dies bedeuten, dass die Teilnehmer ausreichend Zeit erhielten, die ausgewählten Spiele zu spielen. Durch das Spielen machten sie sich mit den Regeln, den zufälligen Ausgängen und Spielstrategien vertraut.

In einem Projekt, das sich mit Stochastik beschäftigt scheint mir diese Phase von besonderer Bedeutung zu sein. Kein anderes Gebiet der Mathematik macht Aussagen, die dem gesunden Menschenverstand so widersprechen wie die Stochastik. HERGET und STRICK beschreiben dies im Falle des Mathematikunterrichtes. KLEIN betrachtet generell das menschliche Verständnis zufälliger Vorgänge. Damit die Aussagen der Stochastik für die Schüler nachvollziehbar werden, und nicht mehr dem gesunden Menschenverstand widersprechen, müssen sie ausreichend Grunderfahrungen mit zufälligen Vorgängen sammeln und diese auswerten.[45]

Für das erste Spielen aller vier Spiele hatte ich einen Zeitraum von ca. drei Zeitstunden vorgesehen. Das Spielmaterial stand den Schülern allerdings während der ganzen Projektzeit zur Verfügung und ich wies sie darauf hin, dass es sinnvoll und erwünscht war, auch in späteren Phasen zu spielen. Dies bot ihnen einerseits die Möglichkeit, gefundene Ergebnisse am Spiel zu testen. Vor allem konnten sich aber so neue Beschäftigungsfelder für die Schüler ergeben. Die Entwicklung des Beschäftigungsfeldes war demnach, ganz im Sinne von Frey, keine einmalige Phase, sondern sie begleitete das Projekt.[46]

Im Anschluss an das Spielen sollten die Schüler in einer Gesprächsrunde über ihre Erfahrungen berichten und mögliche Ideen oder Fragestellungen entwickeln. Für den Fall, dass Schüler keine Beschäftigungsfelder formuliert hätten, hatte ich einige offene Fragen vorbereitet.[47] Aus dieser Gesprächsrunde sollten sich Teilprojektgruppen bilden, die ähnliche Interessen hatten und für den Verlauf des Projektes zusammenarbeiten würden.

Da die Arbeitsweisen und die fachlichen Niveaus der geplanten Untersuchungen nicht allen Schülern klar sein würden, war die Wahl des Beschäftigungsfeldes und die daraus resultierende Gruppeneinteilung zu diesem Zeitpunkt noch nicht verbindlich.

Um die Gruppenarbeit effizient gestalten zu können, hatte ich eine maximale Gruppengröße von fünf Personen vorgeben. Da auch mehrere Gruppen gleiche oder ähnliche Fragen untersuchen konnten, schränkte dies die Wahl des Betätigungsfeldes nur marginal ein.

---

[44] FREY, S. 58

[45] „Eine solide Grundlage sind eigene, sorgfältig und bewusst registrierte, ausgewertete und reflektierte Untersuchungen (Experimente). Das braucht Zeit. Ich muss mir die Zeit nehmen und den Schülerinnen und Schülern die Zeit lassen, neue, andere, bewusste Erfahrungen mit dem Zufall zu machen. Nur so sind die emotional geprägten und damit tief verwurzelten, unbewussten Vor-Einstellungen aufzuweichen.“, HERGET, S. 4 f.

[46] vgl. FREY, 116 f.

[47] Siehe Anhang A-4.2

Projektdurchführung

In der Projektdurchführung sollten die Schüler selbstständig in ihren Teilprojektgruppen arbeiten. Ich hatte im Vorfeld umfangreiches Material zu den Spielen gesammelt, das ich den Schülern bei Bedarf geben konnte.

Abschluss des Projektes

Für den letzten Tag des Projektes hatte ich in Absprache mit den beteiligten Kollegen einen Austausch mit dem Projekt „Glück und Spiel" geplant. Die Schüler beider Projektgruppen sollten über ihre Ergebnisse berichten und so verschiedene Aspekte des Komplexes beleuchten. Um diese Präsentation zu unterstützen, sollte die Projektarbeit ein Produkt erzeugen, dass die mathematischen Erkenntnisse der Schüler aufbereitet und dokumentiert. Diese Veröffentlichung der Resultate sollte einerseits Zeichen der Wertschätzung der Ergebnisse sein und andererseits der Reflexion und Bewertung des Erlernten dienen.

Einige Wochen nach Abschluss des Projektes fand ein Tag der offenen Tür an der Bettinaschule statt, an dem die Schüler die Ergebnisse der Projektwoche einem größeren Publikum vorstellen sollten.[48]

Fixpunkte

Ich plante als Fixpunkt eine tägliche, maximal dreißigminütige „Heure fixe", in der die Schüler über ihre Ergebnisse, die weiteren geplanten Tätigkeiten und mögliche Probleme berichten sollten. Da die Schüler selbstständig arbeiten sollten und die Lehrer nur als Hintergrundlehrer agieren wollten, brauchte das Projekt eine Komponente, in der die Lehrer über den geplanten Verlauf und daraus resultierende Schwierigkeiten informiert würden. Außerdem sollte die Heure fixe den Schülern die Gelegenheit geben, sich über die Arbeit in den anderen Teilprojekten zu informieren und Ideen und Ergebnisse auszutauschen.

Die Heure fixe sollte am Ende jedes Projekttages stattfinden, damit die Lehrer sich auf Hilfestellungen für den Folgetag vorbereiten konnten, gegebenenfalls Materialien organisieren konnten oder eine entsprechende Plenumsstunde konzipieren konnten.
Im Rahmen der Heure fixe sollten die Schüler täglich ihren Projektplan pflegen und so den Verlauf und die weitere Planung des Projektes dokumentieren. Der Aufbau des Projektplanes, der immer auch die für den Tag formulierten Ziele aufführte, sollte die Schüler zur Reflexion ihrer Tätigkeit animieren.

---

[48] „Mehr als anderer [...] Unterricht drängen Projekte an das Licht der Öffentlichkeit, weil sie wegen der Ernsthaftigkeit ihrer Absichten das unschulichste Unternehmen sind, das es im Schulunterricht gibt.", KRÜGER, S. 64

Metainteraktion

Ich plante, zu Beginn jedes Projekttages, eine Unterrichtsstunde im Plenum zu halten. Diese Metainteraktion sollte mir einerseits die Möglichkeit geben, auf fehlendes Vorwissen der Projektteilnehmer reagieren zu können und andererseits die Erkenntnisse der Schüler in einen größeren mathematischen Kontext einzubetten.

Da ich davon ausgehen musste, dass die meisten Schüler nur wenig Vorkenntnisse über Wahrscheinlichkeitsrechnung haben würden, hatte ich folgende Themen vorbereitet: Kombinatorische Grundaufgaben, Gesetz der großen Zahlen, Pfadregeln in Baumdiagrammen und Test von Zufallszahlen. Ob eines oder mehrere dieser Themen in der Plenumsstunde behandelt werden würden, wollte ich je nach Verlauf des Projektes entscheiden.

Um die Erkenntnisse, die die Schüler in ihrer Arbeit machten, zu qualifizieren, sollten diese in einem größeren Zusammenhang dargestellt werden. So sollte die Erfahrungen mit Glücksspielen eine generelle Einsicht in das Wesen zufälliger Vorgänge liefern. Die Tragweite der gebildeten Begriffe sollte dadurch veranschaulicht werden, dass sie auf andere Kontexte übertragbar waren.

Um die Grunderfahrung der Gedächtnislosigkeit der Glücksspiele zu vertiefen, plante ich eine Stunde über das Thema Zufall und Zufallszahlen. Inhalt dieser Stunde waren Fragen nach Erkennen und Erzeugen zufälliger Zahlen und ein anthropologischer Beitrag zu den Schwierigkeiten, zufällige Ereignisse zu verstehen. Diese Plenumsstunde war ein Unterrichtsbesuch. Ich werde sie in dieser Arbeit nicht beschreiben.

In einer weiteren Plenumsstunde plante ich, das Thema „Die Bewertung einer Aktienoption“ zu bearbeiten. Dieses sollte den Schülern zeigen, dass Modelle und Zusammenhänge, die sie bei der Untersuchung von Glücksspielen kennen gelernt hatten, auch in der Modellierung ganz anderer Fragestellungen hilfreich sein können.

Da ich die Lerngruppe erst zu Beginn der Projektwochen kennen lernte, konnte ich die Plenumsstunden nicht schon im Vorfeld detailliert planen. Ich benannte lediglich möglicherweise relevante Gebiete, sammelte Materialien und formulierte einige Einstiegsmöglichkeiten. Die Dauer der Plenumsstunde sollte zwischen dreißig und sechzig Minuten liegen.

3. Der Verlauf des Projekts

3.1. Die Lerngruppe

Am 28. Januar trafen sich alle Teilnehmer des Projektes (10 Schüler, zwei Lehrer) zum ersten Mal. Neun der zehn Schüler (6 Jungen, 4 Mädchen) kamen aus der Jahrgangsstufe 12, einer aus der Jahrgangsstufe 11. An zwei Tagen besuchten zwei Schüler der Jahrgangsstufe 13 als Gäste die Plenumsstunden. W. aus der Jahrgangsstufe 11 kannte ich aus meinem Mathematik-Grundkurs, fünf andere Schüler hatte ich im Rahmen von Hospitationen und Unterrichtsbesuchen im Leistungskurs 12 von Herrn Feltin kennen gelernt. Die restlichen Schüler waren mir bis zu diesem Tag unbekannt. Eine Schülerin erschien krankheitsbedingt erst am vierten Tag des Projektes, ein Schüler kam erstmals am letzten Projekttag.

Drei der Schüler aus der Jahrgangsstufe 12 schätzte ich besonders leistungsstark ein (M., B. und Fl.). W. habe ich als sehr interessiert an mathematisch-naturwissenschaftlichen Fragestellungen und teamfähig kennen gelernt. Seine mathematischen Kenntnisse aus der Sekundarstufe 1 wiesen jedoch deutliche Lücken auf.

Im Rahmen der Vorstellungsrunde sagten die meisten Schüler aus, bisher im Mathematikunterricht noch keine Wahrscheinlichkeitsrechnung kennen gelernt zu haben. In der folgenden Untersuchung des Spiels von Cardano konnten die meisten Schüler zwar die Wahrscheinlichkeiten bestimmen, die Begriffe „günstige Fälle“ oder Laplace-Wahrscheinlichkeit waren ihnen aber nicht bekannt.

3.2. Beschreibung der Plenumsstunde „Glücksspiele und Mathematik“

3.2.1. Didaktische Überlegungen

Nach einer kurzen Unterscheidung von Glücksspielen und Strategiespielen plante ich, die Schüler mit einer Frage zu einem einfachen Glücksspiel zu konfrontieren. Bei der Untersuchung dieser Frage sollten bereits wichtige Zusammenhänge in der mathematischen Behandlung von Glücksspielen erkennbar werden.

Das zu untersuchende Würfelspiel geht auf Geronimo Cardano zurück, der dieses Spiel auf Märkten im mittelalterlichen Italien anbot.[49] Er ließ, gegen Zahlung einer Spielgebühr, Spieler mit zwei Würfeln würfeln und zahlte 50 Taler aus, wenn die Augensumme größer als 9 war.

[49] Die Beschreibung des Spiels ist aus MONKA, S. 18 ff. entnommen. Die Rolle Cardanos bei der Entstehung der Wahrscheinlichkeitstheorie beschreiben ORE und GLICKMANN

Welche Spielgebühr ist sinnvoll? Bei welcher Spielgebühr ist das Spiel fair? Die Untersuchung dieser Fragen führt zur Gewichtung von möglichen Gewinnen oder Verlusten mit deren Wahrscheinlichkeit. Dies leitet zum Begriff des Erwartungswertes hin. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten kann zur Unterscheidung von günstigen und möglichen Fällen im Laplace'schen Sinne führen und wiederholt somit Grundlagenwissen aus der Sekundarstufe I.

Eine sinnvolle Spielgebühr kann auch ohne explizite Berechnung eines Erwartungswertes geschätzt werden.

Die Frage, unter welchen Bedingungen das Spiel fair für alle Beteiligten ist, führt zu der Untersuchung, wann der Erwartungswert Null ist. Wie ausgeführt ist dies die mathematische Beschreibung eines fairen Spiels.

Die Übersetzung der errechneten Ergebnisse in den Kontext des Spiels drängt zu einer Interpretation des Erwartungswertes. Hier taucht der Erwartungswert als „mittleres Ergebnis auf lange Sicht" auf. Dies bietet Anlass die Bedeutung des Begriffes zu befragen.

Bei der Untersuchung der beiden Fragen nach sinnvoller und fairer Höhe des Spieleinsatzes wird eine Modellbildung vorgenommen, die typisch für stochastische Untersuchungen ist. Die Begriffe des Erwartungswertes und der „günstigen" und „mögliche Fälle" tauchen in diesem Modell als Teile einer Problemlösung auf. Die Übersetzung der Ergebnisse auf die Spielsituation führt zu einer Bewertung des Modells.

Um dieses typische Vorgehen nochmals deutlich zu machen, plante ich zum Anschluss der Stunde die Teilnahme an einem Preisausschreiben zu behandeln, bei dem Erfolgsaussichten und Einsatz (in Form des Portos) miteinander in Bezug gesetzt werden sollten.

3.2.2. Methodische Überlegungen

Nach dem informierenden Einstieg, den ich als Lehrervortrag geplant hatte, wollte ich den Schülern das Spiel des Cardano vorstellen und die Frage nach der Spielgebühr an die Schüler stellen. Die Bearbeitung der Frage sollte in Partner- oder Gruppenarbeit geschehen. Ergebnisse der Schüler sollten an der Tafel notiert und erklärt werden.

Ich wählte diese methodische Umsetzung aus zwei Gründen: Zum einen sollten die Schüler in dieser Einstiegsphase bereits mit den Schüler- und Lehrerrollen der Projektmethode vertraut werden. Sie sollten Gelegenheit haben, selbstständig an einer Frage zu arbeiten und ihre Ergebnisse zu präsentieren. Andererseits sollte mir die Bearbeitung dieser offenen Fragestellung einen Einblick in Vorwissen und Leistungsstand der Schüler geben.

Bei der Präsentation der Ergebnisse plante ich, eine mögliche Verschiedenartigkeit von Lösungswegen als typische Eigenschaft anwendungsorientierter Aufgaben zu benennen.

Die Interpretation der Ergebnisse sollte als Diskussion im Plenum stattfinden. Ich hoffte, so einen Eindruck von der Artikulationsfähigkeit der Schüler zu erhalten und gegebenenfalls Regeln für die Gesprächsführung einführen zu können.

In einer weiteren Erarbeitungsphase plante ich, in einem Lehrer-Schüler-Gespräch aus den Lösungen der Schüler ein allgemeines Schema für die Berechnung eines Erwartungswertes zu entwickeln.

In einer Sicherungsphase sollten die Schüler erneut eine Fragestellung untersuchen, bei der die Berechnung eines Erwartungswertes hilfreich sein konnte. Dies sollten die Schüler selbstständig in Partner- oder Gruppenarbeit durchführen. Ich wählte diese Arbeitsform, um ein Gespräch über die Fragestellung und somit eine Begriffsbildung zu ermöglichen. Ergebnisse und Rechenwege sollten an der Tafel vorgestellt werden. Die Interpretation der Aussage sollte als Diskussion im Plenum stattfinden und so Anlass zur Bewertung der Modellierung bieten.

Zum Abschluss dieser Stunde plante ich, in einem kurzen Lehrervortrag, einerseits den Begriff des Erwartungswertes als wichtige Größe bei zufälligen Vorgängen zu unterstreichen und andererseits die untersuchten Fragen als Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung darzustellen.

Eine tabellarische Verlaufplanung der Stunde ist im Anhang A-5.1 zu finden.

3.2.3. Nachbetrachtung

Die Schüler fanden drei unterschiedliche Lösungswege, um eine faire Spielgebühr zu berechen. Keine der Lösungen benutzte eine Unterscheidung der Spielausgänge im Sinne von günstigen und möglichen Fällen. In der Diskussion der Ergebnisse beschrieben die Schüler, dass der faire Wert der Spielgebühr durch zufällige Ausgänge des Spiels zu einem Bankrott Cardanos führen könnte.

In der Phase der Entwicklung eines allgemeinen Lösungsschemas musste ich stärker als geplant lenken, da die Schüler Begriffe wie Laplace-Wahrscheinlichkeit, günstige und mögliche Fälle oder Gegenereignis nicht kannten. Ich entwickelte diese Begriffe anhand der Spielsituation und formulierte eine Darstellung des Erwartungswertes.

In der Sicherungsphase konnten nicht alle Schüler die Frage nach den Erfolgsaussichten bei der Teilnahme an einem Preisausschreiben beantworten. Einige Schüler lösten die Aufgabe durch die Berechnung des Erwartungswertes. Bei der Präsentation der Ergebnisse konnten sie den Lösungsweg erklären und Fragen ihrer Mitschüler beantworten.

Durch die Beobachtung der Arbeit konnte ich auf deutliche Unterschiede hinsichtlich der Leistungsfähigkeit schließen. Fl., B., und M. fiel es leicht, die Situation mathematisch zu beschreiben und eine rechnerische Lösung zu finden. A. hatte eine richtige Lösung, konnte seinen Lö-

sungsweg jedoch nicht verständlich beschreiben. Das Vorwissen über Inhalte der Wahrscheinlichkeitsrechnung war bei allen Schülern sehr gering.
In den Gesprächsphasen stellte ich deutliche Unterschiede in der Argumentationsfähigkeit fest. W. konnte seine Ideen und Vermutungen klar formulieren, ebenso Fl. und M.. N. und E. beteiligten sich hingegen kaum an der Diskussion.

3.3. Arbeit der Teilprojektgruppen

3.3.1. Arbeit der Teilprojektgruppe „Keno“

3.3.1.1. Beschäftigungsfelder und Projektdurchführung

Bei der ersten Beschäftigung mit Keno setzten sich die Schüler zunächst mit dem Gewinnplan auseinander. Die Tatsache, dass bei einigen Kenotypen eine Auszahlung erfolgt, obwohl keine Zahl richtig getippt wurde, fanden die Schüler erstaunlich. Die Frage tauchte auf, ob die steigenden Gewinnsummen aus dem Gewinnplan mit steigenden Unwahrscheinlichkeiten einhergehen. Auch die Möglichkeit, die Zahlen im Vorhinein zu berechnen, wurde thematisiert.
In der ersten Heure fixe gaben F., Fl. und B. an, sich mit Keno beschäftigen zu wollen. Sie wollten der Frage nachgehen, welcher Kenotyp für den Spieler am günstigsten sei und meldeten Unterstützungsbedarf für das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten an.
In der Plenumsstunde des nächsten Tages behandelten wir kombinatorische Grundaufgaben. Ausgehend von konkreten Ziehungen aus einer Urne entwickelten wir Formeln für die Anzahl von Ziehungsmöglichkeiten. Damit die Schüler die Überlegungen selbstständig vertiefen konnten, stellte ich das interaktive Kombinatorik-Modul zur Verfügung.
Thema der Plenumsstunde des dritten Projekt-Tages war „Zufall, Zufallszahlen und Pseudo-Zufallszahlen“. Ich stellte das Mid-Square-Verfahren und den Pair-Test vor. Beide Verfahren hatte ich in Excel implementiert.
Im Anschluss an diese Plenumsstunde fragten Fl., F. und B., ob ich es für möglich hielte, dass sie eine Keno-Simulation in Excel herstellen könnten. Da einer der Schüler angab, das Programm gut zu kennen, sagte ich, dass dies durchaus möglich sei und ermunterte die Schüler, es zu versuchen. Als ersten Schritt empfahl ich, den Mid-Square-Algorithmus in Excel umzusetzen. Die Gruppe arbeitete parallel an der Implementierung des Verfahrens und der Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte.
Ein Schüler hatte das Computerprogramm LotKeno mitgebracht, um Gewinnwahrscheinlichkeiten zu berechnen. Allerdings konnten die Schüler die Ergebnisse nicht mit der kombinatorischen Formel in Einklang bringen und baten mich um Hilfe. Ich riet ihnen, die Wahrscheinlichkeiten für einige einfache Fälle mit Hilfe der kombinatorischen Formel zu berechnen und die Ergebnisse mit den Werten von LotKeno zu vergleichen.

Später berichtete B., dass sie die Werte aus LotKeno nachvollziehen könnten und eine Liste der Gewinnwahrscheinlichkeiten aufgestellt hätten. F. und B. hatten begonnen, die Erwartungswerte der Gewinne zu berechnen.
Fl. konnte den Mid-Square-Algorithmus nachvollziehen, aber die Umsetzung in Excel bereitete ihm noch Probleme. Ich riet ihm, Fragen in seiner Gruppe zu besprechen und gegebenenfalls offene Punkte für die Heure Fixe zu formulieren.
In der Heure Fixe benannte die Gruppe als nächstes Ziel, den Mid-Square-Algorithmus in Excel umzusetzen. Dazu brauche sie Erklärungen zu Funktionen des Programms.
Am nächsten Tag konnte ich die Fragen zu Excel beantworten und die Schüler implementierten den Algorithmus. Als Ziel für den nächsten Tag nannten sie, eine Keno-Simulation in Excel zu erstellen. Sie meldeten Unterstützungsbedarf bei der Suche nach Excel-Funktionen an.
Am letzten Tag des Projektes, ließ ich mir die gesuchte Funktionalität von den Schülern genau erklären und konnte eine Lösungsidee entwickeln. Ich erklärte den Schülern die Excel-Funktion „ZÄHLEWENN“ und deutete eine mögliche Verwendung an, überließ es aber der Gruppe, das Problem zu lösen.

3.3.1.2. Projektabschluss – Dokumentation der Lernergebnisse

Zwei Bilder der erstellten Excel-Anwendung sind in Anhang A-6 abgebildet. Die Gruppe präsentierte ihr Produkt im Computerraum und gaben den Mitschülern die Gelegenheit, die Simulation zu spielen.
Das Produkt der Gruppe dokumentiert, dass die Schüler einfache Erwartungswerte berechnen und interpretieren konnten. Die Ergebnisse konnten sie interpretieren und günstige und ungünstige Kenotypen unterscheiden. Dies belegt, dass sie den Erwartungswert als mittlere Gewinnerwartung verstanden hatten. Die Berechnung des Erwartungswertes eines Kenotyp als arithmetisches Mittel der bedingten Erwartungswerte ist falsch und zeigt, dass die Schüler komplexe Zufallsexperimente noch nicht ausreichend verstanden haben.[50]
Die Schüler konnten die Wahrscheinlichkeit einer Ziehung anhand einer kombinatorischen Formel berechnen und mit den Werten eines Computerprogramms vergleichen. Dies belegt, dass sie eine kombinatorische Grundaufgabe lösen konnten.
Die Implementierung des Mid-Square-Generators zeigt, dass die Schüler das Verfahren verstanden haben. Die Umsetzung mit einem wechselndem Startwert belegt, dass sie erkannt haben, dass Generatoren bei gleichen Ausgangsbedingungen immer gleiche Werte erzeugen.
Die Verwendung der Zahlen für eine Keno-Simulation belegt, dass die Schüler die berechneten Werte richtig umskalieren und runden konnten. Dass die generierten Zahlen einem Ziehen mit

[50] Spalte H in Tabelle 1 soll den Erwartungswert pro Kenotyp angeben.

Zurücklegen, also einem anderen Urnenexperiment, entsprechen, wurde erkannt und bei der Umsetzung berücksichtigt.

3.4. Arbeit der Teilprojektgruppe „Roulette“

3.4.1.1. Beschäftigungsfelder und Projektdurchführung

Beim Spielen vermuteten einige Schüler, dass Roulette so konzipiert sei, dass eine große Gewinnmöglichkeit auch immer mit einem hohen Risiko verbunden sei. Ein Schüler beschrieb die Progressions-Strategie als sichere Gewinnstrategie. Andere Schüler berichteten über eine Manipulation eines Roulette-Spiels, über die in der Tagespresse berichtet worden war.[51]

In der ersten Heure fixe sagten M. und W., dass sie Roulette genauer untersuchen wollten. Sie planten, verschiedene Setzmöglichkeiten bezüglich Gewinn und Wahrscheinlichkeit miteinander zu vergleichen und Strategien zu suchen, die den Erwartungswert vergrößern.

Am zweiten Projekttag besuchten wir das Casino in Bad Homburg. Im Rahmen einer Führung stellte ein Angestellter Roulette vor. Auf die Frage eines Schülers nach der Anordnung der Zahlen im Roulette-Kessel, sagte er, dass die 18 Zahlen links der Null die gleiche Summe ergeben wie die 18 Zahlen rechts der Null. Dies sei nicht nur für die Null der Fall, sondern für jede Zahl des Kessels.

Um den Schülern der Gruppe die Berechnung der Erwartungswerte möglich zu machen, gab ich ihnen zu Beginn des dritten Projekttages den Rat, einen Gewinnplan in Form einer Tabelle aufzustellen. In dieser Tabelle sollen die für die verschiedenen Setzmöglichkeiten alle wichtigen Zahlen auflisten. Welche Daten notwendig waren ließ ich allerdings offen.

In der Heure fixe des dritten Tages berichteten sie, dass beim Roulette der erwartete Gewinn stets -2,7 Prozent sei und sie durch bei einer Internetrecherche einige kuriose Strategien gefunden hätten. Als nächste Beschäftigungsfelder nannten sie eine genaue Untersuchung der Progressions-Strategie und der Eigenschaft der Kesselzahlen, die der Spielbankangestellte erwähnt hatte.

Im Anschluss an die Heure fixe berichtete W., dass sie über einen Vergleich des Roulette-Spiels mit dem russischen Roulette nachgedacht hätten. Ich erwiderte, dass dies eine originelle Überlegung sei, sie hinsichtlich einer Untersuchung aber eine konkrete Fragestellung formulieren sollten. Die Gruppe führte diese Idee jedoch nicht weiter aus.

Da ich wusste, dass die Untersuchung der Progressions-Strategie mit einigem mathematischen Aufwand verbunden war, suchte ich entsprechende Literatur, die ich den Schülern am nächsten Tag zur Verfügung stellte. Ich hatte M. als sehr leistungsstark kennen gelernt und wählte einen

[51] So berichtete zum Beispiel die Online-Ausgabe des Hamburger Abendblattes am 07.12.2004 unter der Überschrift „Lasertrick: Ritz-Kasino geplündert“

Ausschnitt aus dem Vorlesungsskript von Hefendehl-Hebeker.[52] Da der Text nicht für Schüler geschrieben war, versah ich ihn mit einigen Kommentaren, die den Schülern die Bearbeitung vereinfachen sollten.
In der Heure fixe berichteten die Schüler, dass sie die Aussage über die Summe der Kesselzahlen durch ein Gegenbeispiel widerlegen konnten. Allerdings hatten sie herausgefunden, dass die Summe aller Kesselzahlen die Zahl 666, „die Zahl des Teufels!“ ergebe. Die Untersuchung der Progressionsstrategie hatte zu einer Aussage geführt, wie oft man den Einsatz verdoppeln kann. Als nächstes Untersuchungsobjekt planten sie, die Summen der Kesselzahlen weiter zu untersuchen. Dies sei jedoch mit dem Taschenrechner sehr mühsam. Ich bot an, eine entsprechende Untersuchung in Excel anzuleiten.
Als Arbeitsziel für den letzten Tag hatte sich die Gruppe, neben der erwähnten Untersuchung, die Aufbereitung der Ergebnisse zur Darstellung auf einem Poster gesetzt.

3.4.1.2. Projektabschluss – Dokumentation der Lernergebnisse

Das von den Schülern erstellte Poster ist in Anhang A-6 dargestellt. Neben der Summe der Kesselzahlen wird beschrieben, dass Aufteilung nur für den Sonderfall 0 zwei gleichgroße Teilsummen ergibt. Dies dokumentiert die kritische Auseinandersetzung mit der Aussage eines Spezialisten und der Einstufung als Spezialfall. Durch die graphische Darstellung aller möglichen Teilsummen, in der kein erkennbares Muster zu sehen ist, haben die Schüler belegt, dass sie das Diagramm als passende Präsentationsform numerischer Werte verwenden konnten.
Die Beschreibung von Roulette als Spiel mit konstantem Erwartungswert belegt, dass die Schüler den Erwartungswert als wichtige Größe eines zufälligen Vorgangs erkannt haben. Die aufgeführte Rechenvorschrift für den Erwartungswert belegt, dass die Schüler die Struktur der Berechnung verstanden haben. In der Präsentation der Ergebnisse beschrieb W. den jüngeren Schülern den Erwartungswert als „mittlerer Gewinn oder Verlust, wenn man lange spielt.“ Dies interpretiere ich als Beleg, dass wichtige Eigenschaften des Begriffs verstanden wurden.
Zur Fairness des Spiels machten die Schüler die Aussage, dass es wegen des Erwartungswertes von -2,7% nicht absolut fair sei, aber im Vergleich zu anderen Spielen relativ fair sei. Dies zeigte, dass sie den Erwartungswert zum Vergleich zufälliger Vorgänge verwenden konnten.
Die Aussagen zur St. Petersburgstrategie (Progressionsstrategie) belegen, dass die Schüler in der Lage waren, die Strategie mathematisch zu modellieren. Innerhalb des Modells konnten sie eine Aussage über die maximal Zahl der Verdopplungen zu machen. Die Aussage über das Verhältnis von möglichem Gewinn und Risiko belegt, dass die Schüler innerhalb des Modells eine

[52] HEFENDEHL-HEBEKER, S. 210 ff.

wesentliche Eigenschaft der Strategie formulieren und anschließend wieder in die Spielsituation übersetzen konnten.

3.4.2. Arbeit der Teilprojektgruppe „Lotto“

3.4.2.1. Beschäftigungsfelder und Projektdurchführung

Beim Spielen von Lotto behauptete A., dass die 13 auch beim Lotto eine Unglückszahl sei, die man nicht tippen solle, da sie seltener gezogen würde. Die Schüler fragten mich, ob dies so sei. Ich sagte, darüber wüsste ich nichts, aber man könne – mathematisch fundiert – gute und schlechte Zahlen benennen. Dies stieß auf den Unglauben der meisten Schüler, die mir erklärten, jede Zahl sei gleich wahrscheinlich.
In der Heure Fixe des ersten Tages konnten E. und N. kein mögliches Beschäftigungsfeld benennen. A. wollte herausfinden, wie der Keno-Computer funktioniert, in der Hoffnung, „das System knacken zu können“. Ich versuchte E. und N. durch einige der vorbereiteten Fragen zu stimulieren. Sie entschieden schließlich, zusammen mit A. eine Gruppe „Keno 2“ zu bilden und die Funktionsweise des Keno-Computers untersuchen zu wollen.
Im Anschluss an die dritte Plenumsstunde, die eine Möglichkeit, Zufallszahlen zu erzeugen, behandelt hatte, gab ich der Gruppe drei Zeitungsartikel zur Funktionsweise des Keno-Computers und die Beschreibung des Mid-Square-Generators, den ich auch der Gruppe Keno 1 gegeben hatte.
Nach kurzer Zeit kam die Gruppe zu mir und man fragte mich, ob sie Fragen zum Lotto untersuchen könnten. Das Thema Keno sei zu sehr mit Computern verbunden. Dies entspräche nicht ihren Vorkenntnissen und Interessen. Ich sagte, dass der Wechsel des Untersuchungsgegenstandes in diesem Falle sinnvoll sei und gab der Gruppe Zeit, Fragen zu entwickeln, die sie im Verlauf des Projektes bearbeiten wollten.
Die Gruppe formulierte als Beschäftigungsfelder die Fragen: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit sechs Richtige zu haben?“ und „Wieso gibt es ungünstige Zahlen beim Lotto?“. Die Schüler äußerten, die kombinatorischen Formeln aus der Plenumsstunde des Vortages noch nicht verstanden zu haben. Ich gab ihnen das Kombinatorik-Moduls und einen weiteren Text, der die kombinatorischen Grundaufgaben behandelt.
Nach ca. einer Stunde kam E. zu mir und sagte, dass die Gruppe nicht weiter käme, weil sie „gar nichts“ verständen. Ich besprach mit der Gruppe eine einfache kombinatorische Aufgabe und konnte durch gezielten Fragen und Anleitungen erreichen, dass die Schüler diese Aufgabe lösten. Die Aufgabe war so gewählt, dass sie sich erweitern ließ und die Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten im Lotto erschließen ließ.

In der Heure fix berichtete die Gruppe, über ihr neues Untersuchungsfeld und die beiden Fragen, denen sie nachgehen wollten.
Am nächsten Tag gab ich der Gruppe Materialien zu den Häufigkeiten der gezogenen Zahlen und Statistiken der Landeslottozentrale zu den ausgeschütteten Gewinnsummen. Das Material der Landeslottozentrale gab ich in Papierform und als Excel-Tabellen aus.
Nach einiger Zeit berichteten die Schüler, dass sie die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige berechnet hätten und nun begonnen hätten günstige und ungünstige Zahlen zu untersuchen. Die Häufigkeit der gezogenen Zahlen helfe dabei aber nicht, denn dies sei „alles Zufall“. Wie sie die Statistiken der Landeslottozentrale verwenden könnten, sei ihnen nicht klar. Ich machte den Vorschlag, die Daten der Gewinnklasse I auf Besonderheiten zu untersuchen.
In der Heure fixe berichtete die Gruppe, dass sie für die Jahre 2000 bis 2003 eine Liste aufgestellt hätten, die zeige, welche Zahlen wie oft getippt worden waren, wenn der Jackpot an mehr als zehn Spieler verteilt worden sei. Aus dieser Liste ließ sich allerdings kein Muster erkennen. Schüler anderer Gruppen formulierten die Vermutung, dass sie weitere Jahre untersuchen müssten, um ein solches Muster zu erkennen. Die Gruppe erwiderte, dass dies zu mühsam sei.
Ich schlug vor, die Daten nicht in der Papierform zu untersuchen sondern die Excel-Tabelle zu benutzen und bot den Schülern an, am nächsten Tag einige Funktionalitäten des Programms zu erklären.
Am nächsten Tag gab ich der Gruppe eine kurze Einführung in Excel, bei der ich das Kopieren von Daten und die Funktion „ZÄHLEWENN“ vorstellte. Später fragten die Schüler nach Möglichkeiten, ihre Ergebnisse als Diagramm darzustellen. Ich zeigte der Gruppe, wie man Diagramme in Excel erstellen kann und stellte verschiedene Diagrammtypen vor, überließ es aber den Schülern zu entscheiden, welcher Diagrammtyp für die Darstellung ihrer Ergebnisse sinnvoll sei.

3.4.2.2. Projektabschluss – Dokumentation der Lernergebnisse

Das Poster der Gruppe zeigt, dass die Schüler in der Lage waren mit Hilfe einer kombinatorischen Formel die Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ richtig zu berechnen. Dieses Ergebnis konnten sie benutzen, um den Erwartungswert für eine typische Gewinnsumme von 5 Millionen Euro zu berechnen. In der Präsentation der Ergebnisse erklärte E., dass Lotto „eigentlich“ erst bei einer Gewinnsumme von über 14 Millionen Euro für den Spieler fair wäre. Diese Interpretation belegt, dass die Schülerin eine wichtige Bedeutung des Erwartungswertes verstanden hatten.
Die Darstellung der günstigen und ungünstigen Zahlen dokumentiert, dass die Gruppe in der Lage war, eine große Datenmenge zu untersuchen und die Ergebnisse zu interpretieren. Die grafische Aufbereitung der Ergebnisse ist angemessen und belegt, dass die Schüler eine sinnvolle Form der Präsentation statistischer Daten verwenden konnten. Dass die Datenanalyse und

Aufbereitung in Excel vorgenommen wurde weist darauf hin, dass die Gruppe Grundfunktionalitäten dieser Tabellenkalkulation zur Durchführung einer statistischen Untersuchung beherrschte.

In der linken unteren Ecke des Posters sind die Häufigkeiten der bisher gezogenen Zahlen aufgelistet. Zusammen mit der Aussage, dass alle Zahlen gleich wahrscheinlich bleiben, deutet dies an, dass die Schüler die Gedächtnislosigkeit als wichtiges Phänomen zufälliger Vorgänge verstanden haben.

3.5. Beschreibung der Plenums-Stunde: „Ein anderes Spiel – der faire Preis einer Aktienoption“

3.5.1. Didaktische Überlegungen

Diese Plenumsphase sollte gegen Ende des Projektes stattfinden und den Schülern Gelegenheit geben, die Begriffe und Zusammenhänge, die sie im Rahmen der Untersuchung von Glücksspielen kennen gelernt hatten in einem anderen Kontext zu verwenden. Ich hatte bereits mit Schülern der Sekundarstufe II finanzmathematische Themen behandelt und dabei den Eindruck gewonnen, dass sie bei vielen Schülern auf großes Interesse stoßen.

Die Bewertung einer Aktienoption sollte den Schülern zeigen, dass sich Prozesse aus dem Alltag im Rahmen einer mathematischen Modellierung als ein Spiel interpretieren lassen. In dem hier gewählten Unterrichtsgegenstand können mathematische Erkenntnisse in wirtschaftliche Aussagen übersetzt werden und beleuchten Zusammenhänge neu.

Die in Abschnitt A-2.2 in einer Sachanalyse beschriebene Bewertungsidee hatte ich wesentlich reduziert. Inhalt der Phase sollte die Bewertung einer Aktienoption für einen Zeitschritt sein. Durch diese Reduktion wird der Berechnungsaufwand wesentlich reduziert und der Graph besteht nur aus zwei Kanten. Die Idee der risikolosen Bewertung und die damit verbundene Interpretation als ein faires Spiel bleibt jedoch auch in der reduzierten Form erhalten.

Nach der Einführung des Modells für die Aktienpreisentwicklung sollte die Frage behandelt werden, unter welchen Bedingungen der Kauf einer Aktie in dem Modell fair ist. Da hier die Wahrscheinlichkeiten anzupassen sind, stellt dies eine Erweiterung der Frage zum Spiel des Cardano dar. Ich erwartete, dass dies einige Schüler vor Probleme stellen könnte, da in den bisherigen Kontexten Wahrscheinlichkeiten immer durch Spielvorrichtungen festgelegt waren. An dieser Stelle würde es daher Sinn machen, in die Modellvorstellung einer „fairen“ oder „risikolosen“ Welt einzuführen.

Die Frage ließ sich beantworten, indem die Schüler eine Gleichung für den Erwartungswert aufstellten und diese Gleichung nach der gesuchten Wahrscheinlichkeit p auflösten. Die Struktur

der Gleichung entspricht den Gleichungen, die sie bei der Untersuchung von Glücksspielen mehrfach untersucht hatten.
Die anschließende Bestimmung des Optionspreises führt wieder zu einem Erwartungswert, dessen Struktur die Schüler aus ihren Untersuchungen bereits kannten. Die Berechnung stellte somit eine Anwendung bekannter Fertigkeiten in einem neuen Kontext dar.
Nach diesen Arbeiten im Modell sollte die Plausibilität des Modells thematisiert werden. Da sich der berechnete Optionspreis nicht mit bekannten Werten vergleichen ließ, plante ich, zwei Aktien mit unterschiedlichen Kursverläufen zu behandeln[53]. Beide Aktien hatten ähnliche Anfangs- und Endwerte, unterschieden sich jedoch in der Intensität der Kursschwankungen. Hier konnten die Schüler zunächst außerhalb des Modells über den Preisunterschied einer Call-Option diskutieren.
Die Frage, wie sich die unterschiedlichen Kursverläufe im mathematischen Modell umsetzen lassen, diente zunächst der Sicherung des Verständnisses des Modells. Darüber hinaus bot sie auch Anlass, die Intensität der Aktienpreisschwankung als Risiko zu interpretieren.

3.5.2. Methodische Überlegungen

Ich plante, die Einstiegsphase als Lehrer-Schüler-Gespräch, um so die Vorkenntnisse der Schüler über Aktien und Optionen zu sammeln und zu strukturieren.
Im Anschluss an diese Phase wollte ich das Binomialbaum-Modell für die Preisentwicklung der Aktie vorzustellen. Da die Schüler dieses Modell nicht kennen konnten und auch in diesem Rahmen nicht selbst entwickeln sollten, gestaltete ich diese Phase als Lehrervortrag. Ich erwartete, dass Schüler nach den Werten für die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärts- oder Abwärtsbewegung fragen würden. Darauf würde ich antworten, dass diese zunächst nicht bekannt sind und ich mich in der folgenden Phase auf diese Frage beziehen würde.
Die folgende Erarbeitungsphase konzipierte ich als Diskussion im Plenum, da ich in früheren Plenumsphasen die Erfahrung gemacht hatte, dass die meisten Schüler einer solchen Diskussion folgen konnten. Ich beabsichtigte, durch diese Form der Erarbeitung, Raum für verschiedenartige Ideen zum Konzept der risikolosen Bewertung zu schaffen. Die Diskussion sollte den Schülern die Möglichkeit geben, Verständnisschwierigkeiten beim Konzept der „risikolosen Welt“ zu äußern. Für den Fall, dass die Schüler die Bewertungsidee nicht mathematisch modellieren können würden, hatte ich geplant, die Analogie zum Spiel des Cardano herauszuarbeiten.
Ziel der Phase war, dass die Schüler die Analogie zwischen der Preisentwicklung und einem fairen Glücksspiel erkennen sollten. Als Ergebnis sollte eine Gleichung an der Tafel stehen, in der der Erwartungswert des Aktienpreises mit dem aktuellen Aktienpreis gleichgesetzt wird. Die

[53] Die verwendeten Kursverläufe sind in Anhang A-5.2.1 dargestellt.

Schüler sollten die Gleichung nicht selbst lösen. Ich hatte die Lösung vorbereitet und wollte sie, nachdem die Schüler den Lösungsweg skizziert hatten, angeben.
Die Berechnung des Optionspreises sollte als Einzel- oder Partnerarbeit durchgeführt werden. Ähnliche Rechnungen hatten die Schüler im Verlaufe des Projekts bereits mehrfach durchgeführt. Die Bestimmung des Erwartungswertes hatte demnach hier einen übenden Charakter. Die Ergebnisse sollten von den Schülern an der Tafel präsentiert und erläutert werden. Dies sollte die Möglichkeit eröffnen, verschiedene Rechenwege miteinander zu vergleichen.
In der letzten Phase plante ich, den Schülern die Kursverläufe von zwei Aktien zu präsentieren und ihnen die Frage zu stellen, bei welcher die Call-Option teurer wäre. Diese Phase sollte wieder als Diskussion im Plenum stattfinden. Die Untersuchung dieser Frage lässt verschiedene, sich ergänzende Zugänge zu und sollte daher als Gespräch in der Gruppe stattfinden. Damit unterschiedliche Argumentationsebenen deutlich und miteinander in Bezug gesetzt werden konnten, plante ich, diese Diskussion zu leiten.
Das Ende der Stunde sollte ein kurzer Lehrervortrag bilden, in dem ich erläuterte, dass die Bewertung einer Option nur eines von vielen Beispielen ist, in dem die Interpretation eines stochastischen Vorgangs als Spiel ein entscheidender Schritt in der Untersuchung ist.

3.5.3. Nachbetrachtung

In der ersten Phase der Stunde zeigte sich, dass das Vorwissen der Schüler sehr unterschiedlich war. Einige hatten den Begriff „Option“ im Zusammenhang mit Wertpapieren noch nicht gehört, andere konnten die Unterschiede Kauf- und Verkaufsoption richtig erklären.
In der ersten Plenumsphase, in der der Aktienwert in einer risikolosen Welt thematisiert wurde, musste ich stärker als geplant eingreifen. Die Schüler konnten zwar die Analogie zum Spiel von Cardano selbst formulieren, fanden aber nicht zu einer Lösungsidee. Ich erläuterte das Konzept der risikolosen Bewertung nochmals. Danach konnten drei Schüler die Gleichung zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit p aufstellen. B. erläuterte die Idee an der Tafel.
Die Berechnung des Optionspreises als Erwartungswert gelang der überwiegenden Zahl der Schüler. Probleme konnten von Mitschülern durch die Erläuterung des Lösungsweges geklärt werden.
Die zweite Diskussionsphase im Plenum war sehr ertragreich. Einige Schüler konnten mit wirtschaftlichen Überlegungen argumentieren, dass die Option auf die Aktie mit stärkeren Kursschwankungen wertvoller sei und folglich einen höheren Preis habe. Diese Argumentation überzeugte schließlich alle Schüler.
Meine Frage, welche Auswirkung eine stärkere Kursschwankung im Binomialbaum-Modell habe, führte dazu, dass das Modell von den Schülern nochmals besprochen wurde. Schließlich erklärte M., dass der „Schnabel“ in dem Graph weiter geöffnet sei, wenn die Kursschwankung größer

sei. Die Breite des „Schnabels“ wurde schließlich von den Schülern als Maß für die Schwankung des Aktienpreises benannt.

4. Reflexion des Projektes

Die Lerngruppe

Die größte Schwierigkeit bei der Planung des Projektes bestand darin, dass ich die Lerngruppe nicht kannte. Ich musste einige Vermutungen über die Teilnehmer anstellen, die sich im Nachhinein nur zum Teil als richtig herausstellten.

Ich hatte erwartet, dass die Schüler wenige Vorkenntnisse im Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben würden. Tatsächlich sagten die Schüler aus, sie hätten dieses Thema bisher im Mathematikunterricht nicht oder kaum behandelt. Selbst elementare Begriffe wie „günstige“ und „mögliche Fälle“ waren den Schülern nicht bekannt. Durch die Auswahl der Spiele, die Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus möglich machten, konnten dennoch alle Lernenden ihren Zugang zu dem Thema finden.

Weiterhin hatte ich vermutet, dass die Schüler in selbstständigen Gruppenarbeiten erfahren seien. Dies traf nur auf ca. zwei Drittel der Schüler zu. Diese konnten ohne mein Eingreifen ausdauernd und konstruktiv in ihren Teilprojektgruppen arbeiten.

Die Schüler der Teilprojektgruppe Lotto hatten hingegen Schwierigkeiten, als Gruppe zu arbeiten. Durch die Vereinbarung von Gesprächsregeln konnte ich diese Schwierigkeiten abmildern.

Die Regelmäßigkeit der Teilnahme war schlechter als ich erwartet hatte. Wie beschrieben, kamen zwei Schüler erst verspätet zum Projekt. A. fehlte an einem Tag und begründete dies mit einem außerschulischen Termin.[54] Einen Grund für die unregelmäßige Teilnahme sehe ich im Zeitpunkt der Projektwoche, der zwischen der Notenkonferenz und der Zeugnisausgabe lag.

In der letzten Heure fixe hatten die Schüler die Gelegenheit, Rückmeldung zum Projekt zu geben.[55] Die Rückmeldungen waren überaus positiv. Die Schüler bewerteten insbesondere das eigenständige Arbeiten an einem selbst gewählten Thema als sehr gut. Dies bestätigte meinen Eindruck, dass die Schüler neben den fachlichen Inhalten einen Kompetenzzuwachs hinsichtlich der Teamfähigkeit erfahren hatten. Das eigenständige Arbeiten machte sie zu Spezialisten, wodurch sie anderen Schülern - und auch ihren Lehrern - fachliche Inhalte erklären konnten.

Ebenfalls positiv wurde der außerschulische Bezug, der im Lernort Casino besonders deutlich wurde, bewertet. Diese Öffnung der Schule bereicherte die Erfahrungswelt der Schüler und motivierte das innerschulische Arbeiten.

Die Planung des Projektes

[54] Ich informierte den Tutor von A. über sein Fernbleiben. Dieser berichtete, dass der Schüler gelegentlich auch im regulären Unterricht fehle und führte dies auf ein sportliches Engagement zurück.
[55] Neben der Form der mündlichen Rückmeldung hatte die Schüler auch die Möglichkeit den in Abschnitt A-5.3 abgebildeten Fragebogen zu verwenden.

Karl Frey beschreibt die fehlende Auseinandersetzung mit der Projektinitiative als typischen Mangel in der Durchführung von Projektwochen im schulischen Bereich.[56] Dies bewerte ich auch in diesem Projekt als Schwierigkeit.
Da ein frühzeitiges Treffen aller Projektteilnehmer nicht stattfand, konnten die Schüler weniger eigene Ideen und Interessen in das Projekt einbringen, als wünschenswert gewesen wäre. Ein oder zwei gemeinsame Termine im Vorlauf des Projektes hätten mir einerseits die Möglichkeit gegeben, die Lerngruppe kennen zu lernen und andererseits, mich gezielt auf die Interessen der Schüler vorzubereiten. Eine Schwerpunktsetzung, wie hier vorgenommen, wäre nicht notwendig gewesen. Leider ließ die Organisationsform dieser Projektwoche solche Treffen nicht zu.

Der Projektplan, den ich erstellt habe, um den Schülern bei der Planung und Dokumentation ihres Vorgehens zu helfen, war für dieses Projekt unangemessen. Dies zeigte mir einerseits der Umgang der Schüler mit dem Plan und stellte andererseits eine klare Rückmeldung der Schüler dar. Durch die Arbeit in kleinen Teilprojektgruppen an einem selbst gewählten Thema und die regelmäßigen Heure fixe war die Arbeit genügend strukturiert. Eine zusätzliche Formalisierung durch den Projektplan war hier nicht notwendig.

Die veränderte Lehrerrolle

Die in der Projektmethode veränderte Lehrrolle konnte ich gut ausfüllen. Ich beschränkte mich während der Projektdurchführung darauf, die Schüler zu beraten und ihnen, wenn notwendig, Hilfestellungen zu geben, damit sie selbstständig weiterarbeiten konnten. Durch die intensive Planung im Vorfeld des Projektes hatte ich einige der auftretenden Probleme vorhergesehen und konnte darauf eingehen. Auf unvorhergesehene Entwicklungen, wie den starken Einsatz der Tabellenkalkulation in allen Teilprojekten, konnte ich flexibel reagieren.
Einen Hinweis darauf, dass die Schüler die veränderte Lehrerrolle akzeptierten, sehe ich darin, dass sie Herrn Feltin und mich aufforderten, zum Abschluss des Projektes ebenfalls ein Poster mit unseren Ergebnissen aus dem Projekt zu erstellen.[57]
Die Beobachtung der engagierten Arbeit der Schüler empfand ich als sehr bereichernd. Insgesamt empfand ich dieses Projekt als eine wundervolle Erfahrung.

Bereitstellung einer reichhaltigen Lernsituation

Meine Absicht war, den Schülern eine reichhaltige Lernsituation anzubieten, in der sie Grunderfahrungen mit zufälligen Vorgängen machen, wesentliche Begriffe bilden und verwenden konn-

[56] vgl. FREY, S. 118
[57] Siehe Anhang A-6

ten und in der sie Zusammenhänge vermuten, ihnen nachspüren und schließlich untersuchen konnten.

Ich denke, dass mir dies im Wesentlichen gelungen ist. Die offene Unterrichtsform der Projektmethode gab den Schülern genügend Raum, Erfahrungen zu sammeln. Das Spielen der Glücksspiele bot einen handlungsorientierte Zugang, um zufällige Vorgänge zu erleben. Die hier gemachten Erfahrungen wurden bei der Untersuchung von Zusammenhängen und den Vertiefungen in den Plenumsstunden reflektiert.

Wichtige mathematische Begriffe, wie der Erwartungswert oder die „günstigen“ und „möglichen“ Ausgänge eines Zufallsexperimentes, tauchten bei der Beschäftigung mit Fragen auf, die die Schüler selbst gestellt hatten. So wurden diese Begriffe in der Erforschung einer Problemstellung als sinnhaft empfunden. Durch die Wahl der Gruppenarbeit als Arbeitsform bestand für die Schüler Anlass und Notwendigkeit über die Begriffe zu sprechen. Dies unterstützte die Begriffsbildung. Schließlich konnte ich in der Metainteraktion die Tragweite der Begriffe aufzeigen.

Der handlungsorientierte Zugang erleichterte den Schülern eine Modellbildung. Durch das Spielen konnten Zusammenhänge zunächst vermutet werden. In der mathematischen Modellierung wurden diese Zusammenhänge dann genauer untersucht und die gewonnen Erkenntnisse konnten anschließend wieder am Spiel überprüft werden.

Methodische Alternativen

Die Umsetzung eines ähnlichen Projektes, eingebettet in die Struktur des üblichen Fachunterrichts, sehe ich als sinnvoll und möglich an. Gegenüber der Organisationsform der Projektwoche gibt es hier Vor- und Nachteile.

Als Vorteile sind hier zu nennen, dass man als Fachlehrer die Lerngruppe kennt und auf deren Fähigkeiten und Interessen eingehen kann. Die Schüler können im Sinne der Auseinandersetzung mit der Projektinitiative wesentlich stärker in die Planung des Projektes eingebunden werden. Diese Einbindung kann auch zu einer Entlastung des Lehrers führen. Schließlich bietet die Durchführung eines Projektes im Fachunterricht die Möglichkeit, Ergebnisse im weiteren Unterricht aufzugreifen.

Als wichtigen Nachteil gegenüber der Organisation in der Projektwoche sehe ich die zeitliche Struktur des Fachunterrichtes, die dieser offenen und schülerorientierten Methode entgegenwirkt.

Um den Schülern die, für das Verständnis der Aussagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wichtige Möglichkeit zu geben, Grunderfahrungen zu machen, bedarf es jedenfalls einer Methode, die den Schülern Zeit einräumt, diese Erfahrungen zu machen. Diese Möglichkeit besteht meines Erachtens vorrangig bei offenen Unterrichtsformen.

Dass das Gebiet der Stochastik eine stärkere Einbindung der Schüler in die Gestaltung des Unterrichtes als üblich fordert, unterstreicht die Beschreibung von Wilfried Herget.

> „Und wohl nirgendwo sonst [als im Gebiet der Stochastik] ist es so leicht, die Erfolglosigkeit eines Unterrichts zu erfahren, der nach dem Muster ‚Einstiegsbeispiel, Rechenrezept vorstellen, Üben, Anwenden' abläuft und der Idee einer Lehrer-Schüler-Einbahnstraßen-Vermittlung folgt."[58]

[58] HERGET, S. 8

A. Anhang

A -1. Literaturverzeichnis

BEWERSDORF, Jörg: „Glück, Logik und Bluff – Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen“; Vieweg-Verlag, Braunschweig 1998

BIRKER, Klaus: „Projektmanagement – Lehr- und Arbeitsbuch für die Aus- und Weiterbildung“; Cornelsen Verlag, Berlin 2003

BÜCHTER, Andreas, HENN, Hans-W.: „Stochastische Modellbildung aus unterschiedlichen Perspektiven - Von der Genueser Lotterie über Urnenaufgaben zur Keno Lotterie“ - In „Stochastik in der Schule“, Heft 3 aus 2004, S. 28-41

CASSEL, David: „Was verstehen wir unter dem Erwartungswert?” - In „Stochastik in der Schule“, Heft 1 aus 1990, S. 13-19

FELLER, William: „An introduction to probability theory and its applications – third edition“; John Wiley & Sons, New York 1968

FLEWELLING, Gary; „Reichhaltige Lernsituationen – eine Einführung“ - In „mathematik lehren“, Heft 126 aus 2004, S. 8-10

FREY, Karl: „Die Projektmethode“; Beltz, grüne Reihe, 4. Auflage, Weinheim, Basel 1991

GLICKMANN, Leslie: „Cardano – mehr als bloß ein Glücksspieler“ - In „Stochastik in der Schule”, Heft 1 aus 1990, S. 47-52

„Glück – Das Magazin von Lotto“, Herausgeber Lotto Hessen, Wiesbaden

HAMMACHER, Horst W., KORN, Elke, KORN, Ralf, SCHWARZE, Silvia: „Mathe & Ökonomie – neue Ideen für den praxisnahen Unterricht“; Universum Verlag, Wiesbaden 2004

HAUPTFLEISCH, Karsten: „Wie zufällig sind Zufallszahlen?“ - In „Der Mathematikunterricht“, Heft 45 aus 1999, S. 45-62

HERGET, Wilfried: „Wahrscheinlich? Zufall? Wahrscheinlich Zufall...” – In „mathematik lehren“, Heft 85 aus 1997, S. 4-8

HULL, John C.: „Options, Futures and other derivatives – fourth edition“; Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, USA 2000

KLEIN, Stefan: „Die Macht des Zufalls“ - In „Der Spiegel“, Heft 33 aus 2004, S.104-113

KRENGEL, Ulrich: „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“; Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1988

KRÜGER, Rudolf: „Projekt Offener Unterricht“, Schulleiter-Handbuch Band 60, SL Verlag, Braunschweig 1991

„Lehrplan Mathematik – Gymnasialer Bildungsgang“; Kultusministerium Hessen; zitiert nach Stand vom 30.05.2005

LEUDERS, Timo (Hrsg.) „Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II“; Cornelsen-Scriptor, Berlin 2003

LEUDERS, Timo; MAAß, Katja, „Modellieren – Brücken zwischen Welt und Mathematik“ – In „Praxis der Mathematik in der Schule“ Heft 3 aus 2005, S. 1- 7

MONKA, Michael, THIEDE, Manfred, VOSS, Werner: „Gewinnen mit Wahrscheinlichkeit – Statistik für Glücksritter“; Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek 1999

ORE, Oystein; „Pascal and the invention of probability theory“ – In „American Mathematicaly Monthly“, Band 47 aus 1960, S. 409-419

STRICK, Heinz Klaus: „Zufall oder kein Zufall?“ - In „mathematik lehren“, Heft 85 aus 1997, S. 55-59

VERNAY, Rüdiger: „Unterricht verändern – wie beginnen?” - In „mathematik lehren“, Heft 126 aus 2004, S. 4-6

WILLIAMS, David: „Probability with Martingales”; Camebridge Mathematical Textbook, Camebridge University Press, Camebridge 1991

Internetquellen

AGHAMANOUKJAN, Anahid; ANTLANGER, Harald; LANGHOFF, Nina; TRAN, Thy: „Projektmanagement in der Schule“, Publikation im Rahmen von „programm|austria – Die österreichische Projektmanagement Initiative“. Zitiert nach dem Stand vom 23.07.2005 http://www.wu-wien.ac.at/pmg/proant/doc/artikel_pm_schule.pdf

BLK - Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung: „Gutachten zur Vorbereitung des Programms ‚Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts‘ “ - Heft 60 der "Materialien zur Bildungsplanung und zur Forschungsförderung"; Zitiert nach dem Stand vom 24.07.2005 http://www.blk-bonn.de/papers/heft60.pdf

„Gesetze XXL“ – Online-Sammlung verschiedener deutscher Gesetzestexte. Zitiert nach Stand vom 23.07.2005
http://www.gesetze-xxl.de

HEFENDEHL-HEBEKER, Lisa: „Didaktik der Stochastik I – Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vorlesungsausarbeitung“; Universität Duisburg-Essen, Campus Duisburg, Institut für Mathematik; 2003;, Zitiert nach Stand vom 03.02.2005
http://www.uni-duisburg.de/FB11/DIDAKTIK/krivsky/Stochastik/DidStochastikII.pdf

LEHMANN, Eberhard, „Grundlagen von Projektarbeit“, auch erschienen in „Der Mathematikunterricht“, Heft 6/99. Zitiert nach dem Stand vom 10.07.2005
http://home.snafu.de/mirza/Grundlagen-von-Projektarbeit-1999-mu-heft.pdf

MILLER, Jeff: „Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics”; Zitiert nach dem Stand vom 06.07.2005
http://members.aol.com/jeff570/mathword.html

Modul „Kombinatorik“ im MathePrisma der Universität Wuppertal; Autoren: Carsten Busch, B. Großer, Margareta Heilmann; Version: März 2000; Zitiert nach Stand vom 30.01.2005;
http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Kombin/index.htm

WAKOLBINGER, Anton, „’Stochastic processes’ – course notes, SummerSemester 2001“, Vorlesungsskript zu einer Vorlesung am Fachbereich Mathematik an der Johann W. Goethe-Universität, Frankfurt am Main, Zitiert nach dem Stand vom 30.05.2005
http://ismi.math.uni-frankfurt.de/wakolbinger/lecturenotes/StochProc.pdf

A -2. Mathematische Hintergründe – erweiterte Sachanalyse

A-2.1. Martingale

Eine Folge von Zufallsvariablen $Z := (Z_n)_{n=0...}$ heißt (zeitdiskreter) stochastischer Prozess. Martingale sind nun stochastische Prozesse, die zu jederzeit im Mittel gleich bleiben. Der Notation von WAKOLBINGER[59] folgend, definiert man mit einem zugrunde liegenden Wahrscheinlickkeitsmaß p:

Definition

a) Eine Familie $F := (F_n)_{n=0...}$ von σ-Algebren heißt Filtration, wenn gilt:

$$F_n \subseteq F_{n+1} \quad \text{für n=0,...}$$

b) Ein stochastischer Prozess $Z := (Z_n)_{n=0...}$ heißt F-adaptiert, wenn jedes Z_n F_n-adaptiert ist.

c) Eine F-adaptierte Folge integrierbarer Zufallsvariablen $Z_{n,n=0...}$ heißt F-Martingal, wenn gilt

$$E(Z_{n+1} | F_n) = Z_n \quad \text{p-fast sicher.}$$

Die bei Feller (vgl. Fußnote 30 in Abschnitt 2.1.3) geforderte endliche Varianz eines fairen Spieles wird durch die in c) formulierte Bedingung der Integrierbarkeit sicher gestellt.

A-2.2. Optionspreise im Binomialbaum-Modell

Eine Call-Option auf eine Aktie X ist das Recht die Aktie zu einem festgelegten Zeitpunkt T zu einem ebenfalls festgelegten Preis C_T zu kaufen. Die Aktie X heißt zugrunde liegendes Wertpapier der Call-Option (underlying), der Zeitpunkt T ist der Ausübungszeitpunkt (strike time), der Wert C_T ist der Ausübungspreis (strike price).

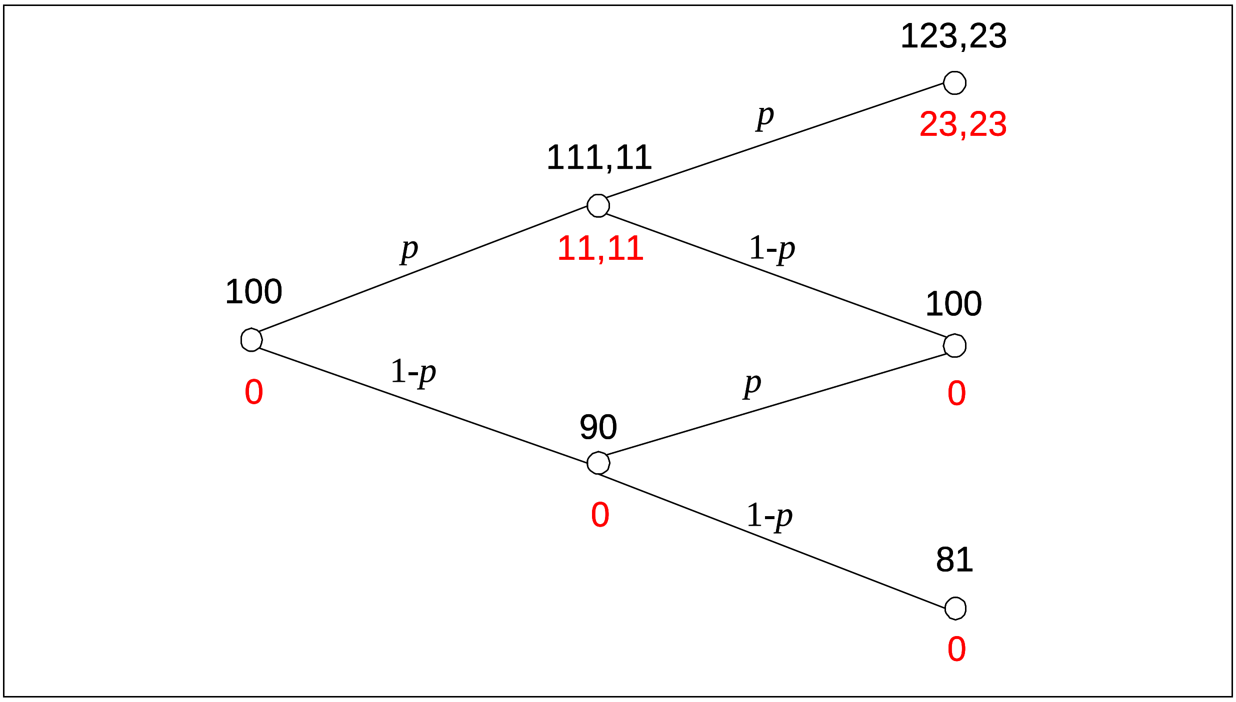
Der Besitzer einer Call-Option kann zum Zeitpunkt des Kaufes seiner Option den späteren Kaufpreis der Aktie X festlegen. Er versichert sich somit gegen einen steigenden Kurs der Aktie X. Die zentrale Frage in der Optionspreisbewertung ist nun, wie teuer diese Versicherung sein sollte.

Im Binomialbaum-Modell ist der Preis der Aktie X durch folgende zeitdiskrete, reellwertige Folge von Zufallsvariablen $X_{n,n=1,2,...,T}$ definiert:

1. $X_0 := X$
2. $X_{n+1} = \begin{cases} d \cdot X_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ u \cdot X_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}$, dabei ist $0 < d < 1$ und $u := \frac{1}{d}$

[59] WAKOLBINGER, S. 48

Die Preisentwicklung der Aktie lässt sich als Graph[60] darstellen. In der folgenden Abbildung ist der Graph für $X_0 := 100$, $d = 0{,}9$ und $u = 1{,}11$ dargestellt. In schwarz und oberhalb der Knoten ist der jeweilige Wert der Aktie eingetragen.



An den Kanten des Graphen stehen die Wahrscheinlichkeiten p für eine Veränderung nach oben („up“) und 1-p für eine Veränderung nach unten („down“). Diese Wahrscheinlichkeiten sind zunächst unbekannt.

Der Wert von p lässt sich nun dadurch bestimmen, dass man die Annahme macht, der Kauf der Aktie sei risikoneutral. Dies bedeutet, dass der Erwartungswert des Aktienspreises, bedingt auf den heutigen Preis, gleich dem heutigen Preis ist. Die Preisentwicklung stellt kein Risiko dar. Dies führt zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} X_n &= E[X_{n+1} \mid X_n] \\ &= p \cdot X_n \cdot u + (1-p) \cdot X_n \cdot d \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat unter den gemachten Annahmen eine eindeutige Lösung:

$$p = \frac{d}{d+1}$$

Dies ist das eindeutige p, zu dem der Prozess X_n ein Martingal ist. Daher heißt p auch das zu X_n gehörige Martingalmaß. Mit diesem Wahrscheinlichkeitsmaß ist die Kursentwicklung der Aktie ein „faires Spiel“.[61] In dem obigen Beispiel ergibt sich mit $d=0{,}9$ der Wert für $p=0{,}473$

[60] Der entstehende Graph ist, wie das Beispiel zeigt, kein Baum. Trotzdem wird das Bewertungs-Modell nach diesem Graphen Binomialbaum-Modell genannt.

Nun kann der Wert der Option als bedingter Erwartungswert bestimmt werden. Dabei berechnet man die Erwartungswerte von der Krone des Baums zur Wurzel hin. Die Werte der Call-Option an der Krone lassen sich leicht bestimmen, sie sind die Differenz zwischen festgelegtem strike price und Preis der Aktie, wenn die Aktie teurer ist als der festgelegte Kurs, oder Null, wenn der Aktienpreis unter dem strike price liegt. Kurz:

$$\text{Wert der Option} = \max(X_T - C_T, 0)$$

Für jeden Zeitpunkt vor T ist der Wert der Option der bedingte Erwartungswert:

$$\text{Wert der Option} = E[C_{n+1} \mid X_n = x_i]$$

Da man die Werte rückwärts von T nach 0 berechnet sind alle Größen bekannt. Für das obige Beispiel sind die so berechneten inneren Werte der Call-Option in rot in das Diagramm eingetragen.

Der Wert zum Zeitpunkt $n=0$, also der Kaufpreis der Option ergibt sich in diesem Beispiel als:

$$\begin{aligned} C_0 &= E[C_1 \mid X_0 = 100] \\ &= p \cdot 11{,}11 + (1-p) \cdot 0 \\ &= 0{,}437 \cdot 11{,}11 \\ &= 5{,}26 \end{aligned}$$

A-2.3. Mid-Square-Methode zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen

Eine einfache und technisch schnell umsetzbare Methode zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen ist die Mid-Square-Methode, die folgendem Algorithmus folgt:

1. Startwert z_1 sei eine $2k$-ziffrige natürliche Zahl, mit $k > 0$
2. $Z_{i+1} := z_i^2$ für $i \geq 1$
3. Sollte Z_{i+1} nicht aus $4k$-Ziffern bestehen, wird Z_{i+1} von vorne mit Nullen aufgefüllt, bis sie $4k$-ziffrig ist.
4. Die neue Pseudo-Zufallszahl z_{i+1} wird aus den mittleren $2k$-Ziffern von Z_{i+1} gebildet.
5. Ab Schritt 2 wird bis zu einer Abbruchbedingung wiederholt.

Dieser Algorithmus erzeugt eine Folge von Pseudozufallszahlen, die aus verschiedenen Gründen für Anwendungen ungenügend ist, u. a. treten je nach Startwert schnell Periodizitäten auf.[62]

[61] Man kann zeigen, dass jede andere Wahl von p Arbitragemöglichkeiten erzeugen, dass heißt es ist möglich, ohne Risiko Gewinn zu machen. Die Arbitragefreiheit ist eine Mindestanforderung an Standardmodelle.
[62] vgl. HAUPTFLEISCH, S. 47, f.

A -3. Materialien zu den Spielen

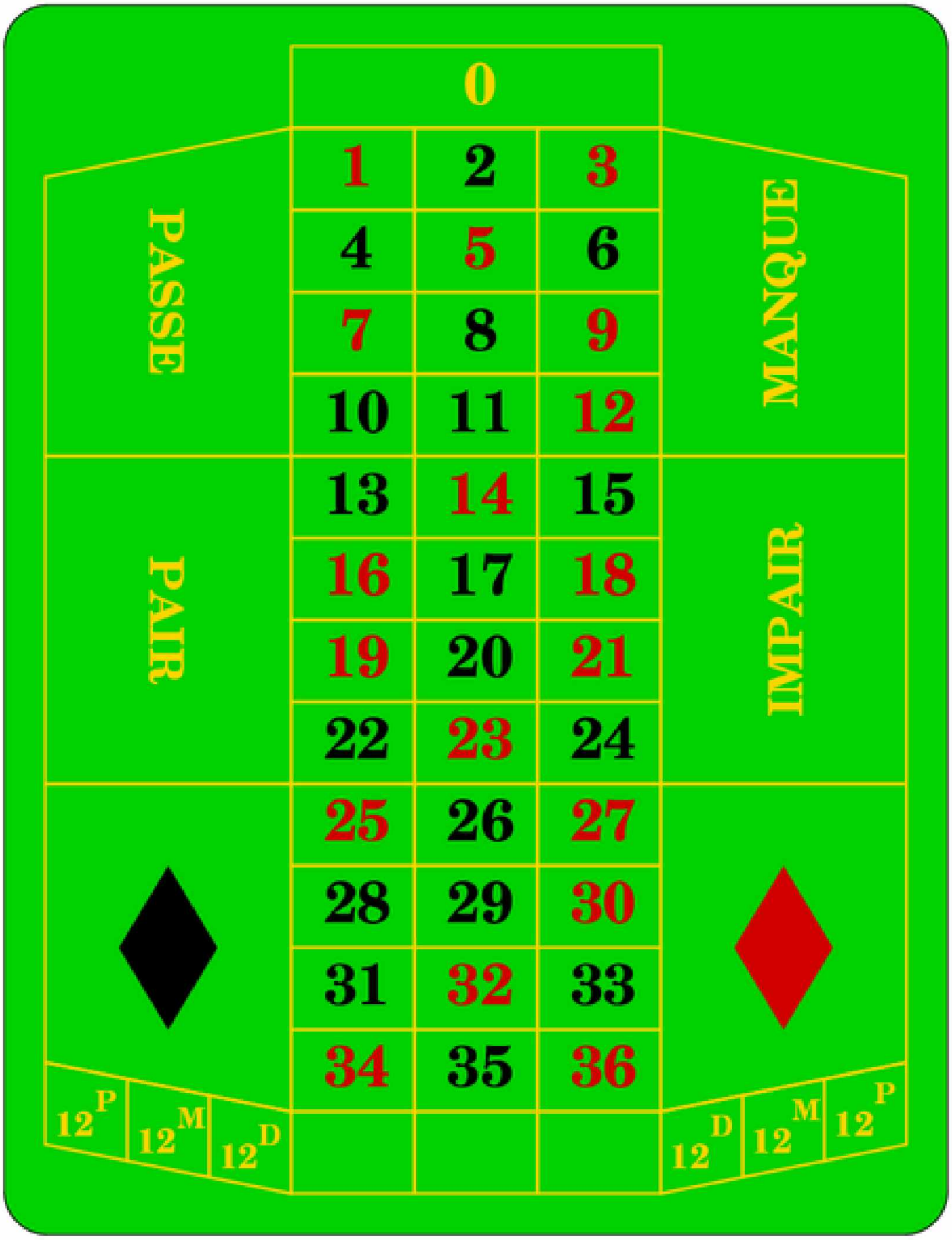
A-3.1. Keno

An jedem Werktag erfolgt die Ziehung von 20 Zahlen aus der Menge der Zahlen von 1 bis 70. Die Ziehung erfolgt dabei nicht durch ein Ziehen von Kugeln aus einer Urne, sondern durch Erzeugen von Zufallszahlen durch einen speziellen Rechner.
Der Spieler kann den gespielten Kenotyp, d. h. die Anzahl der getippten Zahlen, zwischen 2 und 10 wählen. Je nach Kenotyp und Anzahl der richtig getippten Zahlen erhält er eine festgelegte Gewinnsumme. Der Gewinnplan ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

Kenotyp (Anzahl getippter Zahlen)	Anzahl richtig getippter Zahlen	Fester Gewinn bei Einsatz 1€	Fester Gewinn bei Einsatz 2€	Fester Gewinn bei Einsatz 5€	Fester Gewinn bei Einsatz 10 €
10	10	100.000	200.000	500.000	1.000.000
	9	1.000	2.000	5.000	10.000
	8	100	200	500	1.000
	7	15	30	75	150
	6	5	10	25	50
	5	2	4	10	20
	0	2	4	10	20
9	9	50.000	100.000	250.000	500.000
	8	1.000	2.000	5.000	10.000
	7	20	40	100	200
	6	5	10	25	50
	5	2	4	10	20
	0	2	4	10	20
8	8	10.000	20.000	50.000	100.000
	7	100	200	500	1.000
	6	15	30	75	150
	5	2	4	10	20
	4	1	2	5	10
	0	1	2	5	10
7	7	1.000	2.000	5.000	10.000
	6	100	200	500	1.000
	5	12	24	60	120
	4	1	2	5	10
6	6	500	1.000	2.500	5.000
	5	15	30	75	150
	4	2	4	10	20
	3	1	2	5	10
5	5	100	200	500	1.000
	4	7	14	35	70
	3	2	4	10	20
4	4	22	44	110	220
	3	2	4	10	20
	2	1	2	5	10
3	3	16	32	80	160
	2	1	2	5	10
2	2	6	12	30	60

A-3.2. Roulette

Das Spielgerät besteht aus dem in der folgenden Abbildung gezeigten Spielfeld und einem kreisförmigen, drehbar gelagertem Kessel mit 37 Fächern, nummeriert mit den Zahlen zwischen 0 und 36. Die Ziehung wird durch das zufällige Fallen einer Kugel in eines der Fächer realisiert.



[63]

Die Spieler setzen Geldbeträge auf den möglichen Ausgang des Spieles. Dabei können sie auf „einfache Chancen“, dass heißt einzelne Zahlenwerte, oder zusammengesetzte Ereignisse wie

[63] Bild entnommen aus wikipedia.de, der freien Enzyklopädie

„Rouge“ oder „Erstes Dutzend“ setzten. Bei Eintreffen des Ereignisses wird gemäß des Gewinnplans ein Vielfaches des Einsatzes ausgezahlt. Für einige Spielstrategien ist die Tatsache entscheidend, dass es ein Tischlimit, d.h. einen maximal erlaubten Einsatz gibt.

Gewinnplan Roulette

Es sind Setzmöglichkeiten, ihre Bedeutung und der mögliche Nettogewinn als Vielfaches des Einsatzes aufgelistet.[64]

Gesetzt ist	Bedeutung	Möglicher Gewinn
Plein	Einzelne Zahl	35facher Einsatz
Cheval	Ein Paar benachbarter Zahlen	17facher Einsatz
Transversale pleine	Drei Zahlen in einer Zeile	11facher Einsatz
Transversale simple	Zahlen zweier benachbarter Zeilen	5facher Einsatz
Carré	Vier benachbarte Zahlen (z.B. 26,27,29,30)	8facher Einsatz
Die ersten vier Zahlen	Zahlen 0,1,2,3	8facher Einsatz
Kolonne	Eine Spalte des Spielfeldes	2facher Einsatz
Dutzend	1-12, 13-24 oder 25-36	2facher Einsatz
Rot oder Schwarz	Rot oder Schwarz	Einfacher Einsatz
Pair oder Impair	Gerade oder ungerade	Einfacher Einsatz
Manque oder Passe	1-18 oder 19-36	Einfacher Einsatz

A-3.3. Black Jack

Spielregeln

Beim Black Jack spielt der Spieler gegen die Bank. Ziel des Spielers ist, eine höhere Summe von Kartenwerten zu halten als die Bank, ohne sich jedoch zu überkaufen, d.h. eine Summe von 21 zu übersteigen. Gespielt wird mit vier Kartendecks à 52 Karten. Der Wert jeder Karte entspricht der aufgedruckten Zahl. Bilder zählen 10, das As wahlweise 1 oder 11. Nach jedem Spiel werden die ausgespielten Karten wieder in das Deck gemischt.

Zu Beginn jeder Runde macht der Spieler seinen Einsatz. Er erhält darauf offen zwei Karten, die Bank erhält offen eine Karte. Hat der Spieler mit den ersten beiden Karten ein As und eine Karte mit Wert 10, also einen Black Jack, so gewinnt er das 1,5fache seines Einsatzes, es sei denn die Bank erhält ebenfalls einen Black Jack, dann behält der Spieler seinen Einsatz.

Nun nimmt der Spieler solange er möchte weitere Karten. Überkauft er sich dabei, geht sein Einsatz verloren. Nachdem der Spieler keine weiteren Karten mehr möchte, nimmt die Bank weitere Karten. Das Verhalten der Bank ist dabei festgelegt. Die Bank muss dabei Karten nehmen bis sie mindestens 17 Punkte hat. Bei 17 oder mehr Punkten darf die Bank keine weitere Karte nehmen. Der Spieler erhält den doppelten Einsatz, wenn er mehr Punkte als die Bank hat, oder die Bank sich überkauft hat.

[64] Nach MONKA, S. 171

Neben diesen Basisregeln gibt es noch einige weitere Sonderregeln, die jedoch von Spielbank zu Spielbank variieren.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Bank

In der folgenden Tabelle sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten – als Prozentzahlen - der Bank für das Erreichen einer Punktsumme, gegeben einer ersten Karte, angegeben.[65]

Punktsumme 1. Karte	17	18	19	20	21	>21	Black Jack
As	13,08	13,08	13,08	13,08	5,39	11,53	30,77
2	13,98	13,49	12,97	12,40	11,80	35,36	-
3	13,50	13,05	12,56	12,03	11,47	37,39	-
4	13,05	12,59	12,14	11,65	11,12	39,45	-
5	12,23	12,23	11,77	11,31	10,82	41,64	-
6	16,54	10,63	10,63	10,17	9,72	42,32	-
7	36,86	13,78	7,86	7,86	7,41	26,23	-
8	12,86	35,93	12,86	6,94	6,94	24,47	-
9	12,00	12,00	35,08	12,00	6,08	22,84	-
10, B, D, K	11,14	11,14	11,14	34,22	3,45	21,21	7,69

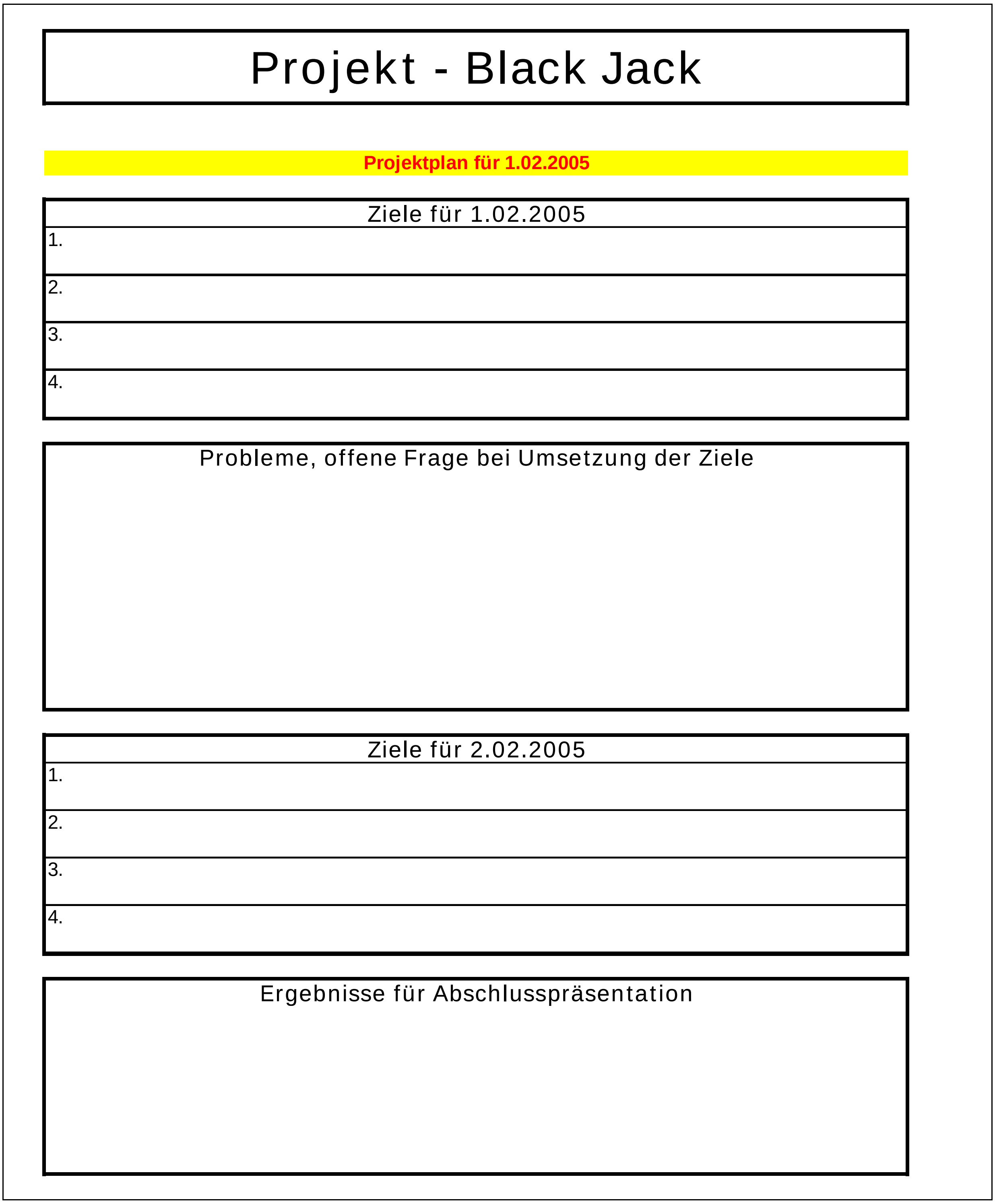
Die Wahrscheinlichkeiten können mit Hilfe der Pfadregeln aus Baumdiagrammen errechnet werden.

[65] Nach MONKA, S. 75

A -4. Materialien zur Projektdurchführung

A-4.1. Projektplan

Jede Teilprojektgruppe hatte einen eigenen Projektordner zum Sammeln von Material, Notizen und des Projektplans. Im Rahmen der Heure fixe wurde dieser Plan täglich gepflegt. Die folgende Abbildung zeigt eine Seite des Plans:



Projekt - Black Jack

Projektplan für 1.02.2005

Ziele für 1.02.2005

1.
2.
3.
4.

Probleme, offene Frage bei Umsetzung der Ziele

Ziele für 2.02.2005

1.
2.
3.
4.

Ergebnisse für Abschlusspräsentation

A-4.2. Vorgeplante Fragen zu den Spielen

Aus dem ersten Spielen sollten die Schüler erste Beschäftigungsfelder entwickeln. Sollten die Schüler keine Ideen formulieren, wollte ich mit folgenden Fragen zum Entstehen eines Beschäftigungsfeldes beitragen:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Lotto zu gewinnen? Gibt es gute und schlechte Zahlen?
- Ist das Spielen in einer Lottogemeinschaft (z.B. Faber) sinnvoll?
- Welches der vier Spiele ist für den Spieler am günstigsten?
- Wie lange kann man mit 1000,- Euro Roulette spielen?
- Gibt es die sichere Roulette-Strategie?
- Macht es beim Black-Jack Sinn, die Strategie der Bank zu spielen?
- Sind die bei Keno gezogenen Zahlen berechenbar?
- Welchen Kenotyp sollte ich spielen?
- Welches der Spiele ist für den Betreiber (das Finanzamt) am lukrativsten?

A -5. Materialien zum Verlauf des Projektes

A-5.1. Materialien zu den Plenumsstunden

A-5.1.1 Plenumsstunde „Glücksspiele und Mathematik“

Tabellarische Verlaufsplanung

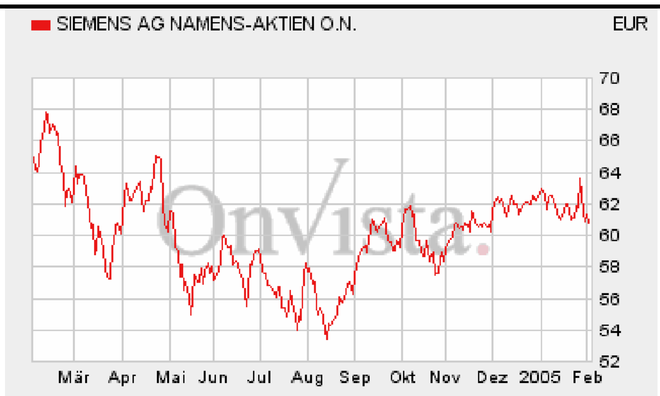
Zeit [Min]	Phase	Inhalt	Sozialform	L-Aktivität	S-Aktivität	Medien
5	Einstieg	Spiele und Mathematik, Spiel des Cardano	L-Vortrag	vortragen	zuhören	Tafel
10	Erarbeitung	Sinnvolle und faire Spielgebühr	Einzel-Partnerarbeit	beobachten	Ideen entwickeln, diskutieren, rechnen, präsentieren	Tafel
10	Erarbeitung	Vergleich und Interpretation der Ergebnisse	Diskussion im Plenum	moderieren	Ideen äußern, zuhören	evtl. Tafel
10	Erarbeitung	Erwartungswert, Laplace-W'keit	L-S-Gespräch	fragen, zuhören, sammeln	Ideen äußern	Tafel
10	Sicherung	Teilnahme an einem Gewinnspiel	Partner-Gruppenarbeit, Diskussion	beobachten, moderieren	Ideen entwickeln, diskutieren, rechnen, präsentieren	Tafel
5	Vertiefung	Erwartungswert, Stochastik und Glücksspiele	L-Vortrag	vortragen	zuhören	

A-5.1.2 Plenumsstunde „Der faire Preis einer Aktienoption“

Tabellarische Verlaufsplanung

Zeit [Min]	Phase	Inhalt	Methode	L-Aktivität	S-Aktivität	Medien
5	Einstieg	Aktien und Optionen, Vorkenntnisse sammeln	L-S-Gespräch	zuhören, fragen, erklären	Ideen äußern	Tafel
10	Erarbeitung	Binomialbaum-Modell für Aktienpreisentwicklung	L-Vortrag	vortragen	zuhören, fragen	Tafel
15	Erarbeitung	Aktienwert in der risikolosen (fairen) Welt	Diskussion im Plenum	moderieren	Ideen äußern, zuhören	Tafel
10	Erarbeitung	Optionswert in der risikolosen (fairen) Welt	Einzel/Partnerarbeit	beobachten, helfen	Ideen äußern, rechnen, Ergebnisse präsentieren	Tafel
15	Sicherung/Vertiefung	Optionspreise und Kursschwankungen	Diskussion im Plenum	moderieren, Leitfragen stellen	Ideen äußern	Tafel, Folie mit Kursverläufen
5	Vertiefung	Glücksspiele und Stochastik	L-Vortrag	vortragen	zuhören	

Kursverläufe der Aktien[66]



[66] Aus www.onvista.de, Stand: 02.02.2005

A-5.2. Tabellarische Übersicht über den Verlauf des Projektes

<table>
<tr><th>Tag</th><th>28.01.2005</th><th>31.01.2005</th><th>01.02.2005</th><th>02.02.2005</th><th colspan="2">03.02.2005</th></tr>
<tr><td>Plenumsstunde</td><td>Mathematik und Glücksspiele:
„Spiel von Cardano“</td><td>Kombinatorische Grundaufgaben</td><td>Zufall, Zufallszahlen und Pseudozufallszahlen</td><td>Der faire Preis einer Aktienoption</td><td colspan="2">entfallen</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Arbeit der Teilprojektgruppen</td><td rowspan="3">Alle Teilnehmer:
Spielen der verschiedenen Glücksspiele i, erste Fragen. Bildung von drei Teilprojektgruppen</td><td rowspan="3">Alle Teilprojektgruppen:
Besuch der Spielbank Bad Homburg</td><td>Keno 1:
Arbeit mit Kombinatorik-Modul, Abgleich mit Ergebnissen von LotKeno, Berechnung von Erwartungsgwerten, Umsetzung des Mid-Square-Algorithmus’ in Excel</td><td>Keno:
Implementierung des Mid-Square-Algorithmus in Excel, Kenosimulation in Excel</td><td>Keno:
Fertigstellung der Simulation</td><td>anschließend:

Präsentation der Ergebnisse</td></tr>
<tr><td>Keno 2 -> Lotto:
Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit für sechs Richtige
Arbeit mit Kombinatorik-Modul,</td><td>Lotto:
Erwartungswert für sechs Richtige
Untersuchung des Tippverhaltens, Datenanalyse</td><td>Roulette:
Untersuchung der Kesselzahlen, Sammeln und bewerten der Ergebnisse, Darstellung auf Poster</td><td></td></tr>
<tr><td>Roulette:
Berechnung des Erwartungswertes für verschieden Spielstrategien, Internetrecherche</td><td>Roulette:
Modellierung der Progressionsstrategie, Untersuchung der Kesselzahlen</td><td>Lotto:
Datenanalyse in Excel
Sammeln und Aufbereiten der Ergebnisse,</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Heure fixe</td><td>Keno 1:
<u>Beschäftigung:</u> Welcher Kenotyp ist am besten?
<u>Offen:</u> Wie berechnet man Gewinnwahrscheinlichkeiten?</td><td rowspan="3">ausgefallen</td><td>Keno:
<u>Beschäftigung</u>: Erstellung einer Keno-Simulation, dazu zunächst Erzeugung von Zufallszahlen
<u>Offen:</u> Funktionen in Excel,</td><td>Keno:
<u>Beschäftigung:</u> Fehler in Keno-Simulation beheben
<u>Offen:</u> Funktionalitäten von Excel</td><td colspan="2" rowspan="3">Alle Gruppen:
Feedbackrunde,</td></tr>
<tr><td>Roulette:
<u>Beschäftigung:</u> Vergleich verschiedener Spielstrategien. Erhöhen des Erwartungswerts?
<u>Offen:</u> Welche Spielstrategien gibt es? Wie berechnet man Erwartungswerte?</td><td>Roulette:
<u>Beschäftigung:</u> Progression. Kesselzahlen
<u>Offen</u>: Mathematische Formulierung der Progressionsstrategie</td><td>Roulette:
<u>Beschäftigung:</u> Kesselzahlensummen, Aufbereitung der Ergebnisse
<u>Offen:</u> Arbeiten in Excel</td></tr>
<tr><td>Keno 2:
<u>Beschäftigung:</u> Sind die Zahlen berechenbar?
<u>Offen:</u> Erzeugen und analysieren von Zufallszahlen</td><td>Lotto:
<u>Beschäftigung:</u> Wieso gibt es günstige Zahlen?
<u>Offen:</u></td><td>Lotto:
<u>Beschäftigung:</u> Welche Zahlen werden am häufigsten getippt?
<u>Offen:</u> Datenanalyse in Excel</td></tr>
</table>

A-5.3. Fragebogen für Rückmeldungen der Schüler

Um den Schülern die Möglichkeit zu geben, anonym und schriftlich Rückmeldung zum Projekt zu geben, teilte ich in der letzten Heure fixe folgenden Fragebogen aus:

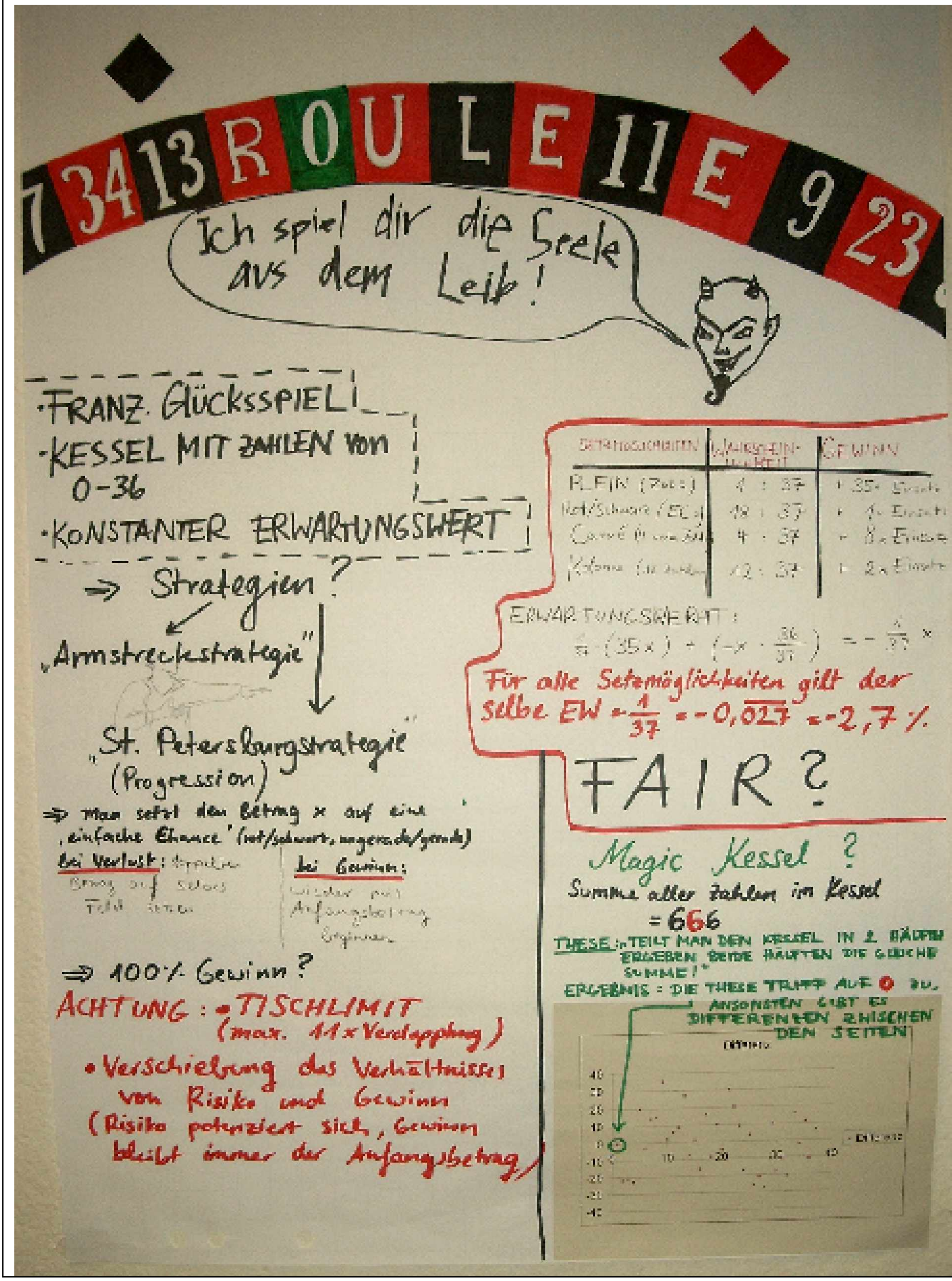
Schülerbefragung zum Projekt "Glücksspiele und Stochastik"

Der täglich zu pflegende Projektplan war: *(Zutreffendes ankreuzen oder ergänzen)*	☐	unnötig
	☐	hilfreich, um die Arbeit zu strukturieren
	☐	schwer zu pflegen
		eigene Ergänzungen:

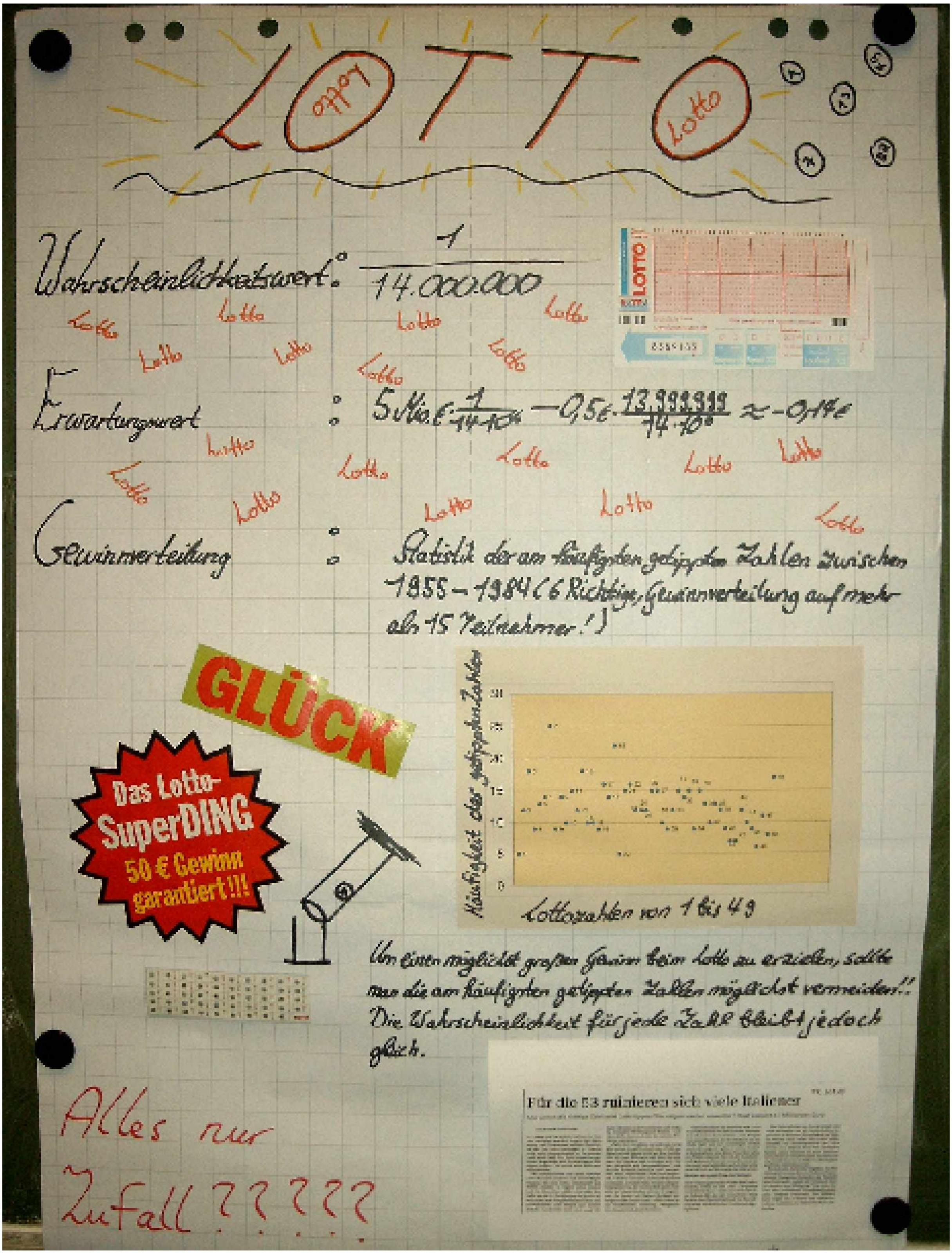
Gut gefallen hat mir:
Nicht gefallen hat mir:
Ich wusste vor dem Projekt nicht, ...
Weitere Ideen:

A -6. Produkte der Projektarbeit

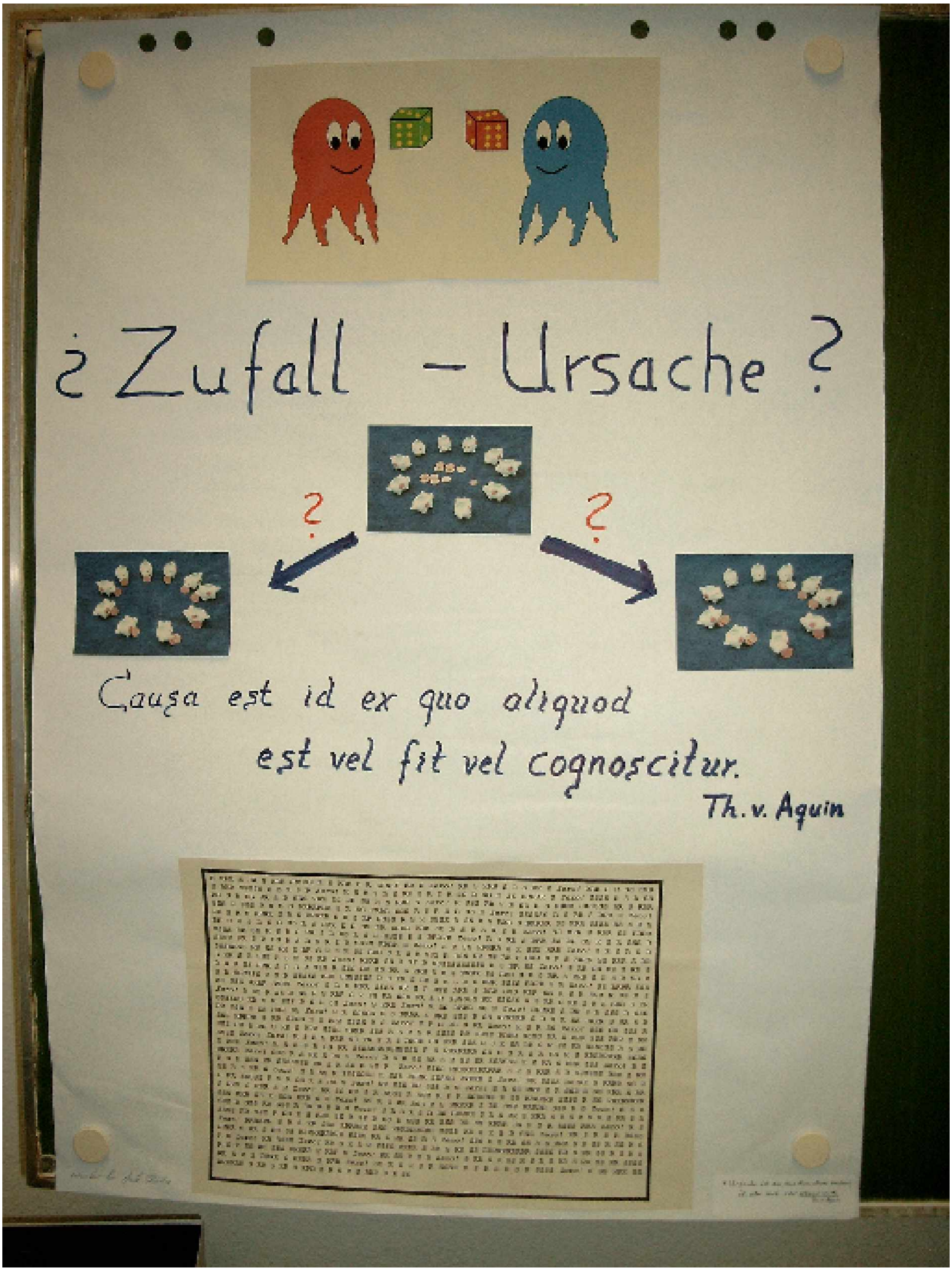
Poster der Teilprojektgruppe Roulette



Poster der Teilprojektgruppe Lotto



Poster der Teilprojektgruppe Feltin / Müller



Bilder der Keno-Simulation

Blatt 1 – Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte – dynamische Excel-Tabelle

Einsatz	Angekreuzt	Richtige Zahlen	Lotkeno	1/Lotkeno (Wahrscheinlickeiten)	Gewinn	Erwartungswert	E-Wert Kenotypen
1	10	10	2.147.180,70	0,000000465726987952155	100.000	-0,953427301	-0,929435255
		9	47.237,98	0,000021169406481818200	1.000	-0,978830594	
		8	2.570,77	0,000388988513169206000	100	-0,961101149	
		7	261,09	0,003830096901451610000	15	-0,942548546	
		6	44,44	0,022502250225022500000	5	-0,887488749	
		5	12,08	0,082781456953642400000	2	-0,834437086	
		0	38,62	0,025893319523562900000	2	-0,948213361	
	9	9	387.196,53	0,000002582667773391460	50.000	-0,870866611	-0,916588347
		8	10.325,24	0,000096850049006124800	1.000	-0,903149951	
		7	684,84	0,001460195082062960000	20	-0,970796098	
		6	85,60	0,011682242990654200000	5	-0,941588785	
		5	18,21	0,054914881933003800000	2	-0,890170236	
		0	25,96	0,038520801232665600000	2	-0,922958398	
	8	8	74.941,26	0,000013343784185107100	10.000	-0,866562158	-0,918433719
		7	2.435,59	0,000410578135071995000	100	-0,958942186	
		6	198,82	0,005029675082989640000	15	-0,924554874	
		5	31,07	0,032185387833923400000	2	-0,935629224	
		4	8,46	0,118203309692671000000	1	-0,88179669	
		0	17,58	0,056882821387940800000	1	-0,943117179	
	7	7	15.464,07	0,000064666029059620100	1.000	-0,935333971	-0,876078699
		6	618,56	0,001616658044490430000	100	-0,838334196	
		5	63,12	0,015842839036755400000	12	-0,809885932	
		4	12,62	0,079239302694136300000	1	-0,920760697	
	6	6	3.382,77	0,000295615723209086000	500	-0,852192138	-0,875652938
		5	169,14	0,005912262031453230000	15	-0,91131607	
		4	22,09	0,045269352648257100000	2	-0,909461295	
		3	5,87	0,170357751277683000000	1	-0,829642249	

Blatt 2 – Simulation eines Kenospiels - dynamische Excel-Tabelle

	10er Spiel	9er Spiel	8er Spiel	7er Spiel	6er Spiel	5er Spiel	4er Spiel	3er Spiel	2er Spiel
60	o	o	56 o	o	o	o	o	o	o
36	o	o	3 o	o	o	o	o	o	o
25	o	o	21 o	o	o	o	o	o	
70	o	o	23 x	o	o	o	o		
38	o	o	11 o	o	o	o			
9	o	o	8 o	o	o				
65	o	o	30 o	o					
22	o	o	59 o						
20	o	o							
55	o								
66									
49	0	0	1	0	0	0	0	0	0
23									
5									
29									
58									
7									
19									
52									
45									

Versicherung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Sämtliche Entlehnungen und Anlehnungen sind unter Quellenangaben kenntlich gemacht.

Frankfurt am Main, den 7. August 2005 ……………………………………………………..

(Axel Müller)